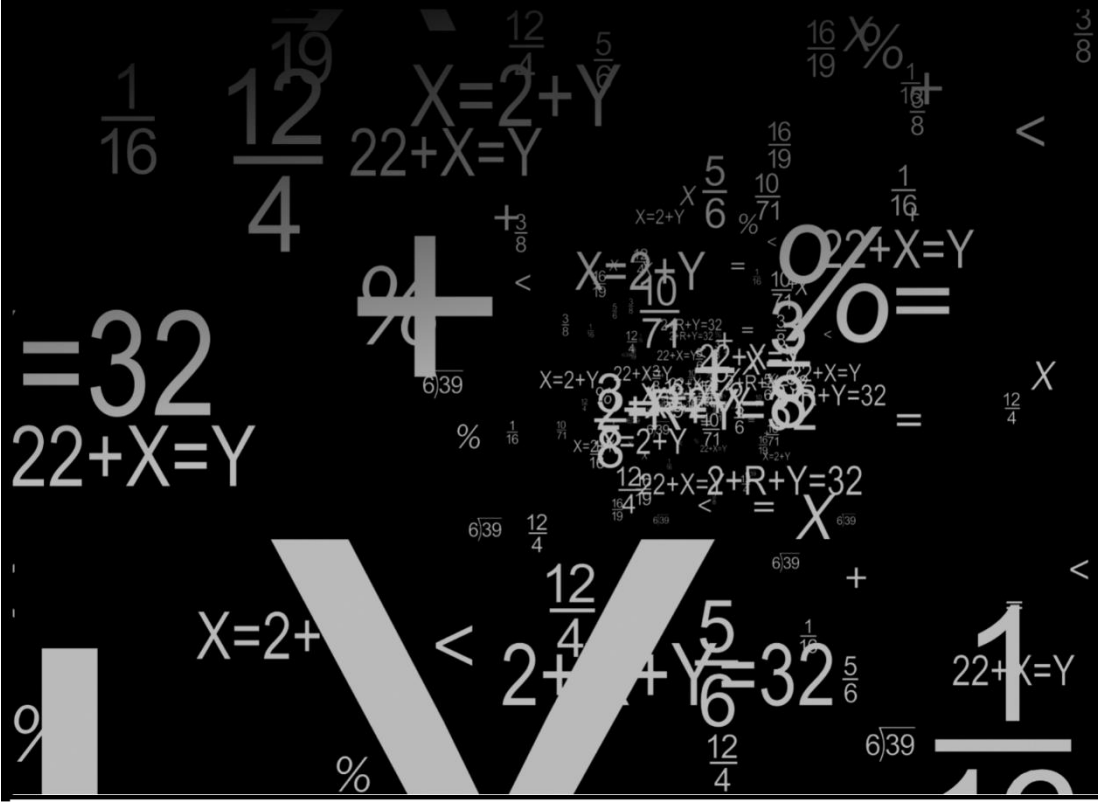




Dr. Mas'ud B., M.Pd.
Dr. Marwati Abd. Malik, M.Pd.



KETENTUAN PIDANA

- (1) Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 100.000.000,00 (seratus juta rupiah).
- (2) Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
- (3) Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
- (4) Setiap orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah)

PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

**Dr. Mas'ud B., M.Pd.
Dr. Marwati Abd. Malik, M.Pd.**



Global Research and Consulting Institute

2019

Judul : Pemecahan Masalah Matematika
Penulis : Dr. Mas'ud B. M.Pd., & Dr. Marwati Abd. Malik, M.Pd.

ISBN 978-602-5920-03-5

Penyunting : Prof. Dr. Hamzah Upu, M.Ed.
Perancang Sampul : Arfah
Penata Letak : Riswan Arizona Budhi
Isi : Sepenuhnya tanggung jawab penulis
Cover : <http://www.modafinilsale.com>

Diterbitkan Oleh:



GLOBAL RESEARCH AND CONSULTING INSTITUTE
(Global-RCI)

Jl. Poros Kompleks Perumahan BTN. Saumata Indah/
SMAN 10 Kab GOWA, Sunggumna, Sulawesi-Selatan,
Indonesia

Cetakan Pertama, Mei 2019

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Hak Cipta ©2018 pada penulis.

Hak penerbitan pada Global RCI. Bagi mereka yang ingin memperbanyak sebagian isi buku ini dalam bentuk atau cara apapun harus mendapat izin tertulis dari penulis dan Penerbit Global RCI.

All Rights Reserved

Mas'ud B. & Marwati Abd. Malik

Pemecahan Masalah Matematika: -- cetakan I

-- Makassar: Goba Research and Consulting Institute (Global-RCI), 2019
viii + 194 hal.; 14,8 x 21 cm

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang Maha Pengasih, Maha Penyayang, serta Maha Mengetahui yang telah memberikan sedikit dari ilmu-Nya yang maha luas sehingga upaya penulis untuk menyelesaikan buku ini dapat terlaksana.

Selama ini sudah berbagai perangkat pembelajaran yang dibuat untuk menjadikan peserta didik dapat menyelesaikan masalah dengan baik, termasuk menyelesaikan masalah matematika. namun belum memberikan hasil yang optimal. Dalam rangka pengembangan kemampuan peserta didik dalam memecahkan masalah di sekolah, maka penulis menawarkan perangkat pembelajaran yang memungkinkan cocok digunakan dalam pembelajaran tersebut. Perangkat pembelajaran yang dimaksudkan adalah perangkat pembelajaran yang dapat melatih peserta didik menjadi pemecah masalah dengan baik. Perangkat tersebut dikemas dalam buku berjudul “Pemecahan Masalah Matematika”.

Penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari pembaca demi sempurnanya buku ini. Harapan penulis, semoga buku ini bermanfaat bagi penulis sebagai investasi amal di dunia dan akhirat, serta bermanfaat untuk guru Indonesia sebagai

sarana menciptakan pembelajaran yang dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik.

Makassar, Mei 2019

Mas'ud B.

DAFTAR ISI

Halaman Judul	iii
Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
BAB I Pendahuluan	1
BAB II Teori Belajar Pendukung Pemecahan Masalah Matematika	15
BAB III Prototipe Riset Pemecahan Masalah Matematika	29
BAB IV Jenis-Jenis Instrumen dalam Penelitian Pemecahan Masalah Matematika	51
BAB V Analisis Data dalam Pemecahan Masalah Matematika	61
BAB VI Perangkat Riset Pemecahan Masalah Matematika	85
BAB VII Perangkat Riset Pemecahan Masalah Matematika (Lanjutan)	113
BAB VIII Materi Kajian Pemecahan Masalah Matematika	137
Daftar Pustaka	191
Riwayat Hidup	205

BAB I

PENDAHULUAN

Tujuan pendidikan nasional yaitu “untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran agar peserta didik secara aktif mengembangkan potensi dirinya untuk memiliki kualitas spiritual keagamaan, pengendalian diri, kepribadian, kecerdasan, akhlak mulia, serta keterampilan yang diperlukan dirinya, masyarakat, bangsa dan negara”(Depdiknas, 2003). Untuk mencapai tujuan tersebut diperlukan kondisi pembelajaran yang ideal dalam kelas. Kondisi pembelajaran yang ideal diantaranya sebagai berikut: (1) perhatian peserta didik yang aktif dan terfokus kepada pembelajaran, (2) berupaya menyelesaikan tugas dengan benar, (3) peserta didik mampu menjelaskan hasil belajarnya, (4) setelah selesai mengerjakan tugas, peserta didik terbiasa melakukan cek terhadap hasil kerja, (5) peserta didik didorong untuk terbiasa mencari alasan mengapa hasil kerja menjadi salah (Suyono, 2011).

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang mempunyai andil cukup besar dalam mempersiapkan peserta didik di abad ke-21 (Abidin, 2015). Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai

peran penting berbagai disiplin ilmu dan memajukan daya pikir manusia. Oleh karena itu, untuk menguasai dan memanfaatkan teknologi di masa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini. Menyadari pentingnya penguasaan matematika, sehingga mata pelajaran matematika merupakan salah satu mata pelajaran wajib bagi peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah (Depdiknas, 2003).

Salah satu komponen penting dalam pembelajaran matematika yang harus dikuasai dan senantiasa ditingkatkan adalah kemampuan pemecahan masalah. Seperti dikemukakan dalam Permendiknas No. 22 tahun 2006 tentang standar isi, bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah agar peserta didik memiliki kemampuan memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh.

Namun pada kenyataannya, kondisi pembelajaran yang berjalan saat ini tidak demikian. Selama ini hasil pendidikan hanya tampak dari kemampuan menghafal fakta, konsep, teori atau hukum. Walaupun banyak anak yang mampu menyajikan tingkat hafalan yang baik terhadap materi yang diterimanya, tetapi pada kenyataannya mereka seringkali tidak memahami secara mendalam substansi materinya (Depdiknas, 2007). Salah satu tujuan pendidikan matematika yang menjadi permasalahan yang dihadapi oleh peserta didik Indonesia adalah kemampuan pemecahan masalah yang masih tergolong rendah.

Data hasil tes *Trends in International Mathematics and Sciences Study* (TIMSS) 2011 dan *Program for International Student Assessment* (PISA) 2015, menunjukkan bahwa kemampuan

matematika peserta didik Indonesia masih cukup memprihatinkan. Pada hasil studi TIMSS 2011 untuk peserta didik kelas VIII, Indonesia menempati peringkat 38 dari 45 negara dalam bidang matematika (Widystono, 2014). Sementara, hasil tes PISA tahun 2015 dalam bidang matematika, peserta didik Indonesia berada pada peringkat 54 dari 72 negara (OECD, 2016). Berdasarkan hasil studi ini, dapat disimpulkan bahwa apa yang diajarkan dan cara mengajar peserta didik di Indonesia berbeda dengan apa yang diujikan atau distandarkan di tingkat internasional.

Fenomena tersebut di atas dipicu oleh kurang tersedianya pembelajaran yang mengakomodasi upaya menumbuhkan-kembangkan kemampuan pemecahan masalah bagi peserta didik. Dalam pembelajaran dewasa ini, guru menuntut peserta didiknya untuk dapat memahami materi ajar dan memecahkan masalah dengan baik, namun jarang mengajarkan kepada peserta didik bagaimana strategi-strategi memahami materi dan memecahkan masalah dengan baik. Padahal kemampuan pemecahan masalah sebagai salah satu hasil pembelajaran matematika yang harus dimiliki peserta didik, sehingga diharapkan peserta didik menjadi individu yang mampu menyelesaikan masalah yang dihadapinya sendiri (Depdiknas, 2006). Kemampuan pemecahan masalah sebagai salah satu komponen proses yang melibatkan peserta didik dalam memahami matematika (NCTM, 2000). Keterampilan dan pengetahuan pemecahan masalah nantinya akan digunakan dan diaplikasikan di dalam kehidupan nyata dalam menghadapi masalah apapun (Shadiq, 2004). Bell (1978) dan Lester (Branca, 1980) menegaskan bahwa kemampuan pemecahan masalah matematika sangat dibutuhkan oleh masyarakat, dan jantungnya matematika adalah pemecahan

masalah. Oleh karena itu, kemampuan pemecahan masalah merupakan hal yang sangat penting.

Namun demikian pembelajaran pemecahan masalah matematika di sekolah-sekolah masih banyak mengalami hambatan. Hasil tes tengah semester (MID semester) menunjukkan, lebih 54 dari 103 (52,43%) peserta didik SMA di Parepare kemampuan dalam memecahkan masalah matematika tergolong rendah.

Menghadapi fenomena tersebut, dibutuhkan berbagai keterampilan. Salah satu aspek dimensi pengetahuan dan keterampilan yang menarik untuk dikaji lebih mendalam dalam pembelajaran adalah aspek metakognisi. Seseorang yang akan memecahkan masalah membutuhkan pemantauan efektivitas strategi penyelesaian dan membutuhkan kesadaran lain yang dapat memungkinkan penggunaan modifikasi pada strategi yang dipilih sehingga masalah dapat diselesaikan. Metakognisi dalam pemecahan masalah mengacu pada pengetahuan dan proses yang digunakan untuk membantu proses berpikir sukses dalam memecahkan masalah (Reynold dalam Kholil, 2014).

Metakognisi sering disebut sebagai "*thinking about thinking*" (Livingstone, 1997). Komponen metakognisi meliputi keterampilan metakognitif dan pengetahuan metakognitif (Hacker, 2009). Menurut Desoete (2001), Lucangeli & Cornoldi (1997) metakognisi memiliki tiga komponen pada pembelajaran, yaitu: (a) pengetahuan metakognitif, (b) keterampilan metakognitif, dan (c) kepercayaan metakognitif. Pengetahuan metakognitif mengacu kepada pengetahuan deklaratif, pengetahuan prosedural, dan pengetahuan kondisional seseorang

pada penyelesaian masalah. Sedangkan keterampilan metakognitif mengacu kepada keterampilan perencanaan (*planning skills*), keterampilan monitoring (*monitoring skills*), keterampilan evaluasi (*evaluation skills*) dan keterampilan prediksi (*prediction skills*).

Untuk mengembangkan aspek keterampilan metakognitif, diperlukan strategi metakognitif untuk mengajarkannya. Strategi metakognitif dapat digambarkan sebagai rutinitas yang mewakili tindakan pengolahan mental secara spesifik yang merupakan bagian dari proses kompleks dan dilakukan dalam rangka untuk mencapai tujuan seperti pemahaman terhadap apa yang telah dibaca (Hacker, 2009).

Seyogyanya di dalam setiap pembelajaran guru memberikan pelatihan mengoptimalkan keterampilan metakognitif. Karena dengan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam pembelajaran, dapat membantu peserta didik dalam menyelesaikan masalah yang dihadapi. Menurut Livingston (1997), Coutinho (2007), peserta didik yang memiliki keterampilan metakognitif yang baik akan menunjukkan prestasi belajar yang baik pula dibandingkan dengan peserta didik yang memiliki keterampilan metakognitif rendah.

Sementara proses pembelajaran matematika di SMA Parepare, aspek keterampilan metakognitif belum banyak disentuh oleh para guru. Sehingga peserta didik belum terbiasa menggunakan keterampilan metakognitifnya dalam belajar. Hasil penelitian Mas'ud (2015), menunjukkan bahwa kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik yang melibatkan keterampilan metakognitif lebih baik dibandingkan tanpa

melibatkan keterampilan metakognitif. Fakta lain menunjukkan, hasil tes tengah semester (MID semester) peserta didik kelas XI IPA pada 5 (lima) SMA Negeri di Parepare, 63 dari 103 (61,17%) peserta didik kemampuan menerapkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah masih rendah.

Berdasarkan uraian sebelumnya, terindikasi bahwa salah satu penyebab rendahnya kemampuan pemecahan masalah peserta didik SMA di Parepare adalah karena kurang optimalnya penyajian keterampilan metakognitif dalam pembelajaran. Dengan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam pembelajaran, akan membantu mengembangkan kemampuan berpikir peserta didik yang selanjutnya juga berpengaruh terhadap hasil belajar peserta didik. Keterampilan metakognitif berarti kemampuan untuk memikirkan tentang bagaimana cara belajar. Livingston (1997) menyatakan bahwa metakognitif memegang salah satu peranan penting agar pembelajaran berhasil. Menurut Imel (2002), keterampilan metakognitif sangat diperlukan untuk kesuksesan belajar. Lebih lanjut, dinyatakan bahwa peserta didik yang menggunakan keterampilan metakognitifnya memiliki prestasi yang lebih baik dibandingkan peserta didik yang tidak menggunakan keterampilan metakognitifnya.

Selanjutnya, berdasarkan hasil survey dan wawancara terhadap 6 guru matematika di SMA Parepare, ditemukan dan diperoleh keterangan bahwa di dalam proses pembelajaran pada umumnya belum menggunakan model pembelajaran, bahan ajar (buku peserta didik) yang mendisain pelatihan keterampilan metakognitif peserta didik. Juga belum memiliki instrumen/alat ukur yang dapat mengukur tingkat keterampilan metakognitif peserta didik. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa penyebab

lain rendahnya kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik SMA di Parepare adalah karena belum tersedianya model pembelajaran yang melatih keterampilan metakognitif untuk belajar. Oleh karena itu, salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah peserta didik adalah melalui proses pembelajaran yang melatih keterampilan metakognisinya.

Masalah yang sering dikemukakan pada forum-forum ilmiah tentang keterampilan metakognitif adalah sebagai berikut: 1) apakah model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) valid ditinjau dari dasar teori, komponen-komponen model, dan perangkat pembelajarannya?; 2) apakah model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) praktis ditinjau dari keterlaksanaan model dan respon guru?; 3) apakah model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) menarik? dan 4) apakah model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) efektif dalam meningkatkan hasil belajar dan aktivitas, serta direspon positif oleh peserta didik?

Selanjutnya tujuan penulisan karya ilmiah dalam bentuk buku referensi ini adalah sebagai berikut: 1) menghasilkan model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) yang bersifat valid ditinjau dari dasar teori, komponen-komponen model, dan perangkat pembelajarannya; 2) menghasilkan model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) yang praktis ditinjau dari keterlaksanaan model dan respon guru; 3) menghasilkan model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM) yang menarik dan 4) menghasilkan model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (POKM)

yang efektif dalam meningkatkan hasil belajar dan aktivitas, serta direspon positif oleh peserta didik?

Selanjutnya, lebih dari sekadar tujuan saja, manfaat lebih jauh tentang kajian optimalisasi metakognitif adalah sebagai berikut:

1) Manfaat Praktis

- a. Model POKM dapat membantu meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika sebagai dampak instruksional, dan meningkatkan sikap positif peserta didik terhadap pelajaran matematika, kemandirian belajar, serta interaksi sosial peserta didik sebagai dampak pengiring.
- b. Model POKM menjadi salah satu model pembelajaran alternatif bagi guru untuk merancang pembelajaran di kelas.
- c. Model POKM dapat meningkatkan kualitas proses pembelajaran pada umumnya serta memberikan kemudahan kepada peserta didik dalam menguasai materi bahan ajar.
- d. Menghasilkan perangkat pembelajaran matematika SMA (buku guru dan buku peserta didik, RPP, LKPD, dan penilaian) yang menjadi acuan dan sumber belajar bagi guru matematika dalam menerapkan secara luas model POKM,

2) Manfaat teoritis

- a. Keseluruhan hasil-hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teori dalam menerapkan keterampilan metakognitif peserta didik dalam belajar untuk memecahkan setiap masalah.
- b. Menambah khasanah ilmu pengetahuan khususnya dalam upaya peningkatan kualitas pendidikan matematika, dan kualitas sumber daya manusia umumnya dalam menjawab tuntutan masa depan.

Spesifikasi produk yang dihasilkan dan dikembangkan adalah model Pembelajaran Optimalisasi Keterampilan Metakognitif untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan masalah matematika di SMA disingkat model POKM. Model POKM terdiri dari komponen sintaks, sistem sosial, prinsip reaksi, sistem pendukung, dampak instruksional dan pengiring. Model ini digunakan untuk meningkatkan kualitas pemebelajaran secara umum dan meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik di SMA. Adapun perangkat yang digunakan adalah RPP, Buku peserta didik dan guru, LKPD, dan Brosur Keterampilan metakognitif.

Karakteristik dari model yang dihasilkan dan dikembangkan adalah sebagai berikut: 1) model POKM dikembangkan berdasarkan konsep teori konstruktivisme (konstrutivisme kognitif dan kontrutivisme sosial). Prinsip-prinsip konstruktivisme yang lebih berpusat pada peserta didik; 2) model POKM memiliki sintaks terdiri atas 5 (lima) fase: I. Orientasi; II. Penyajian Informasi tentang keterampilan metakognitif; III. Simulasi Penerapan Keterampilan Metakognitif; IV. Latihan Terbimbing; V. Latihan Mandiri; 3) model POKM ini menggambarkan prosedur pembelajaran yang akan dilaksanakan oleh guru dengan melatih peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif yang meliputi: keterampilan memprediksi, keterampilan merencanakan, keterampilan memantau, dan keterampilan mengevaluasi. Kegiatan ini terintegrasi dengan proses pembelajaran; 4) model POKM yang akan dikembangkan lebih tepat diterapkan pada jenjang SMA atau sederajat, dan untuk mata pelajaran matematika. 5) model POKM yang akan dikembangkan dapat diterapkan pada jenjang sekolah lain, dan untuk mata pelajaran lain dengan melakukan modifikasi

perangkatnya sesuai dengan model, jenjang sekolah, kelas yang diajar, dan mata pelajaran yang diajarkan; 6) membutuhkan pemikiran tingkat tinggi dan 7) model POKM diindikasikan dapat peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik di SMA.

Beberapa asumsi yang mendasari penulisan buku ini adalah sebagai berikut:

- 1) Penentuan kriteria ketuntasan minimal (KKM) oleh SMA, yang dipakai sebagai standar kompetensi minimal yang harus dicapai oleh peserta didik telah melalui prosedur yang benar.
- 2) Kelas yang dijadikan tempat uji coba, memiliki karakteristik yang setara karena keduanya memiliki predikat yang sama yaitu kelas XI-IPA dan penempatan peserta didik pada ke dua kelas tersebut tidak berdasarkan rangking.
- 3) Pembelajaran yang dilakukan dengan menggunakan model POKM ini dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik, apabila prinsip-prinsip dan prosedur yang mendasarinya diterapkan dengan baik.
- 4) Strategi yang digunakan dalam pengembangan model ini, yakni strategi pengembangan model secara serentak antara model pembelajaran, perangkat-perangkat pembelajaran, dan instrumen dilakukan secara bersama-sama.
- 5) Pengumpulan data tentang aktivitas peserta didik yang mengikuti pembelajaran dengan model POKM, dilakukan di kelas hanya melalui pengamatan oleh dua observer.
- 6) Peserta didik yang dipilih untuk diamati aktivitasnya hanya 7 orang peserta didik.
- 7) Pemilihan materi uji coba hanya satu pokok bahasan yakni "Lingkaran" untuk dibuat salah satu perangkat pembelajaran pendukung model POKM.

- 8) Waktu pelaksanaan uji coba yang dilaksanakan hanya 7 (tujuh) kali pertemuan.
- 9) Pelaksanaan penelitian dan pengembangan model ini, hanya sampai pada tahap tes, evaluasi dan revisi. Tidak dilanjutkan ke tahap implementasi secara utuh karena pertimbangan keterbatasan waktu dan biaya.
- 10) Kegiatan implementasi yang dilakukan hanya terbatas pada sekolah tempat uji coba (masih kelas-kelas paralel).

Terdapat beberapa istilah-istilah yang digunakan dalam buku ini. Untuk memberikan arahan yang jelas dan langkah yang operasional dalam pelaksanaan penelitian ini, maka istilah-istilah tersebut perlu diberikan penjelasan dan batasan. Istilah-istilah yang dimaksudkan beserta batasannya dikemukakan berikut ini.

- 1) Pembelajaran adalah seluruh rangkaian kegiatan peserta didik dan guru yang telah dirancang untuk menjadikan peserta didik belajar, artinya berdasarkan rancangan tersebut, guru memberikan bantuan kepada para peserta didik agar mereka memperoleh pengetahuan atau informasi tentang materi ajar.
- 2) Model pembelajaran adalah suatu perencanaan atau pola yang digunakan sebagai petunjuk/pedoman dalam merencanakan pembelajaran di kelas, termasuk untuk menentukan perangkat-perangkat pembelajaran sehingga tujuan pembelajaran dapat dicapai. Model pembelajaran tersebut mencakup komponen-komponen (a) sintaks, (b) sistem sosial, (c) prinsip reaksi, (d) sistem pendukung, dan (e) dampak instruksional & pengiring.
- 3) Metakognitif adalah kesadaran berpikir seseorang tentang proses berpikirnya sendiri yang terdiri atas dua komponen, yaitu: pengetahuan metakognitif (*metakognitive knowledge*) dan keterampilan metakognitif (*metakognitive skill*).

Sedangkan yang dimaksud dengan kesadaran berpikir adalah refleksi diri seseorang tentang apa yang diketahuinya, apa yang telah diketahuinya, dan apa yang akan diketahuinya.

- 4) Keterampilan metakognitif adalah kemampuan untuk memikirkan tentang bagaimana cara belajar yang berkaitan dengan keterampilan prediksi, perencanaan, monitoring, dan evaluasi dalam pembelajaran (dalam menyelesaikan masalah/suatu tugas tertentu).
- 5) Optimalisasi keterampilan metakognitif adalah proses memaksimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah/suatu tugas tertentu dalam pembelajaran.
- 6) Pemecahan masalah adalah sebagai satu usaha mencari jalan keluar dari satu kesulitan guna mencapai satu tujuan yang tidak begitu mudah segera untuk dicapai
- 7) Kemampuan pemecahan masalah matematika adalah kecakapan dalam menyelesaikan (pemecahan) masalah matematika. Proses yang dapat dilakukan pada setiap pemecahan masalah tersebut terangkum dalam empat langkah, yakni (a) memahami masalah (*understanding the problem*), (b) merencanakan penyelesaian (*devising a plan*), (c) melaksanakan rencana (*carrying out the plan*), (d) memeriksa proses dan hasil (*looking back*)
- 8) Meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika adalah proses mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematika melalui pembelajaran yang menerapkan pelatihan keterampilan metakognitif.
- 9) Optimalisasi keterampilan metakognitif dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika adalah kemampuan peserta didik menerapkan secara maksimal keterampilan metakognitif yang meliputi: (a) keterampilan

memprediksi, (b) keterampilan merencanakan, (c) keterampilan memonitoring, dan (d) keterampilan mengevaluasi dalam menyelesaikan masalah matematika, untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika yang meliputi: (a) memahami masalah, (b) merencanakan penyelesaian, (c) melaksanakan rencana, dan (d) memeriksa proses dan hasil.

- 10) Model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif (diberi nama model POKM) adalah suatu model pembelajaran yang mengajarkan materi bahan ajar dengan mengintegrasikan pelatihan keterampilan metakognitif.
- 11) Model pembelajaran optimalisasi keterampilan metakognitif untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika (model POKM) adalah suatu model pembelajaran yang selain mengajarkan materi bahan ajar dengan pengoptimalan keterampilan metakognisi, juga sekaligus untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik.
- 12) Model POKM yang berkualitas adalah suatu model pembelajaran yang memenuhi keempat kriteria, yaitu: kevalidan, kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifan.
- 13) Kevalidan model POKM. Model POKM dikatakan valid apabila menurut validator (ahli dan praktisi), pengembangan model tersebut dilandasi oleh teori yang kuat, juga memiliki konsistensi internal yakni terjadi saling keterkaitan antar komponen dalam model.
- 14) Kepraktisan model POKM. Model POKM dikatakan praktis apabila (a) menurut validator (ahli dan praktisi) model tersebut dapat diterapkan, (b) menurut observer, keterlaksanaan model pembelajaran di kelas termasuk dalam

kategori “terlaksana”, dan (c) respon guru tentang penerapan model POKM minimal guru merespon positif 70% dari jumlah aspek yang ditanyakan.

- 15) Kemenarikan. Model yang dikembangkan dikatakan menarik jika lebih 50% dari peserta didik yang menyatakan tertarik terhadap minimal 70% jumlah aspek yang ditanyakan. Indikator-indikator yang dipergunakan untuk menentukan kemenarikan model POKM yaitu: (1) perhatian, (2) percaya diri, (3) menarik, (4) kepuasan, (5) kesadaran sendiri.
- 16) Keefektifan model POKM. Indikator-indikator yang dipergunakan untuk menentukan keefektifan model POKM yaitu: (1) ketercapaian standar hasil belajar yang meliputi: (a) kemampuan pemecahan masalah matematika dan kemampuan menerapkan keterampilan metakognitif peserta didik masing-masing dalam kategori “tinggi”, (b) tercapai ketuntasan belajar klasikal, yakni minimal 75% peserta didik mencapai ketuntasan belajar individu yaitu 75 (untuk rentang skor 0 - 100, (2) aktivitas peserta didik sesuai dengan aktivitas yang diharapkan sebagaimana tercantum dalam sintaks model POKM minimal “aktif”, (3) lebih dari 50% peserta didik memberikan respons positif terhadap penerapan model POKM yang meliputi: respon terhadap pembelajaran, respon terhadap buku peserta didik, dan respon terhadap LKPD. Model POKM dikatakan efektif apabila memenuhi 3 indikator tersebut.
- 17) Aktivitas peserta didik adalah seluruh kegiatan peserta didik dalam proses pembelajaran yang didasarkan pada sintaks/rencana pembelajaran model POKM.

BAB II

TEORI BELAJAR PENDUKUNG PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Berikut ini dikemukakan secara komparatif pandangan dua teori (Teori Behaviorisme dan Teori Konstruktivisme), dalam beberapa hal yang berkaitan dengan pembelajaran, yang disarikan dari Degeng (2005), Budiningsi (2012), Sani (2013) seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Perbandingan Teori Belajar Konstruktivisme dengan Behaviorisme

1) Tentang Belajar dan Pembelajaran

<i>Behaviorisme</i>	Konstruktivisme
◆ Memandang bahwa pengetahuan adalah objektif, pasti, dan tetap tidak berubah. ◆ Belajar adalah perolehan pengetahuan, sedangkan mengajar adalah memin-	◆ Memandang bahwa pengetahuan adalah non objektif, bersifat temporer, selalu berubah, dan tidak menentu. ◆ Belajar adalah menyusun dari pengalaman konkrit, aktivitas kolaboratif, dan refleksi serta

dahkan pengetahuan kepada orang yang belajar.	interpretasi, sedangkan mengajar adalah menata lingkungan agar peserta didik termotivasi dalam menggali makna serta menghargai ketidak-menentuan.
◆ Peserta didik diharapkan akan memiliki pemahaman yang sama terhadap pengetahuan yang diajarkan.	◆ Peserta didik bisa memiliki pemahaman yang berbeda terhadap pengetahuan tergantung pada pengalamannya, dan perspsktif yang dipakai dalam menginterpretasikan.
◆ Fungsi <i>mind</i> adalah menjiplak struktur pengetahuan melalui proses berpikir yang dapat dianalisis dan dipilah sehingga makna yang dihasilkan dari proses berpikir seperti itu ditentukan oleh karakteristik struktur pengetahuan.	◆ <i>Mind</i> berfungsi sebagai alat untuk menginterpretasikan peristiwa, objek, atau perspektif yang ada dalam dunia nyata sehingga makna yang dihasilkan bersifat unik dan individualistik.

2) Tentang Penataan Lingkungan Belajar dan Pembelajaran

Behaviorisme	Konstruktivisme
♦ Keteraturan, keputusan, ketertiban ♦ Peserta didik harus dihadapkan pada aturan-aturan yang jelas dan ditetapkan lebih dulu secara ketat. Pembiasaan dan disiplin menjadi sangat esensial. ♦ Kegagalan atau ketidakmampuan dalam penambahan pengetahuan dikategorikan sebagai kesalahan yang perlu dihukum, dan keberhasilan dipandang sebagai bentuk perilaku yang pantas diberi hadiah.	♦ Ketidakteraturan, ketidakpastian, kesemrawutan ♦ Peserta didik harus bebas. Kebebasan menjadi unsur yang esensial dalam lingkungan belajar. ♦ Kegagalan atau keberhasilan, kemampuan dan ketidakmampuan dilihat sebagai interpretasi yang berbeda yang perlu dihargai.
♦ Ketaatan pada aturan dipandang sebagai penentu keberhasilan belajar. Peserta didik adalah objek yang harus berperilaku sesuai dengan aturan.	♦ Kebebasan yang dipandang sebagai penentu keberhasilan belajar. Peserta didik adalah subjek yang harus mampu menggunakan kebebasan untuk melakukan

◆ Kontrol belajar dipegang oleh sistem yang berada di luar diri peserta didik.	pengaturan diri dalam belajar. ◆ Kontrol belajar dipegang oleh peserta didik.
--	--

3) Tentang Tujuan Pembelajaran

<i>Behaviorisme</i>	Konstruktivisme
◆ Tujuan pembelajaran ditekankan pada penambahan pengetahuan ◆ Seseorang dikatakan telah belajar apabila mampu mengungkapkan kembali apa yang telah dipelajari.	◆ Tujuan pembelajaran ditekankan pada belajar bagaimana belajar ◆ Melatih peserta didik untuk dapat berpikir kritis dan terampil dalam memproses pengetahuan agar dapat menemukan dan menciptakan sesuatu yang bermanfaat bagi dirinya sendiri dan orang lain.

4) Tentang Strategi Pembelajaran

<i>Behaviorisme</i>	Konstruktivisme
◆ Penyajian isi menekankan pada keterampilan yang terisolasi dan akumulasi	◆ Penyajian isi menekankan pada penggunaan pengetahuan secara bermakna mengikuti

fakta mengikuti urutan dari bagian keseluruhan. ◆ Pembelajaran mengikuti urutan kurikulum secara ketat. ◆ Aktivitas belajar lebih banyak didasarkan pada buku teks dengan penekanan pada keterampilan mengungkapkan kembali isi buku teks. ◆ Pembelajaran dan evaluasi menekankan pada hasil .	urutan dari keseluruhan bagian. ◆ Pembelajaran lebih banyak diarahkan untuk meladeni pertanyaan atau pandang peserta didik. ◆ Aktivitas belajar lebih banyak didasarkan pada data primer dan bahan manipulatif dengan penekanan keterampilan berpikir kritis. ◆ Pembelajaran menekankan pada proses.
---	---

5) Tentang Evaluasi

Behaviorisme	Konstruktivisme
◆ Evaluasi menekankan pada respon pasif, keterampilan secara terpisah dan biasanya menggunakan “paper and pencil test” ◆ Evaluasi yang menuntut jawaban benar. Jawaban benar menunjukkan bahwa	◆ Evaluasi menekankan pada penyusunan makna secara aktif yang melibatkan keterampilan terintegrasi, dengan menggunakan masalah dalam konteks nyata. ◆ Evaluasi yang menggali munculnya berpikir

peserta didik telah menyelesaikan tugas belajar.	divergen, pemecahan ganda bukan hanya satu jawaban benar.
♦ Evaluasi dipandang sebagai bagian terpisah dari kegiatan pembelajaran, dan biasanya dilakukan setelah selesai kegiatan belajar dengan penekanan pada evaluasi individual.	♦ Evaluasi merupakan bagian utuh dari belajar dengan cara memberikan tugas-tugas yang menurut aktivitas belajar yang bermakna serta menerapkan apa yang dipelajari dalam konteks nyata. Evaluasi menekankan pada keterampilan proses dalam kelompok.

Walaupun uraian di atas mempertentangkan secara tajam antara prinsip-prinsip behaviorisme dengan prinsip-prinsip konstruktivisme, namun dalam implementasinya pada pembelajaran agak sulit untuk menerapkan salah satunya secara independen tanpa ikut yang lainnya. Dalam artian, agak sulit menerapkan prinsip-prinsip konstruktivisme dalam pembelajaran tanpa terlibat prinsip-prinsip behaviorisme, dan sebaliknya. Dengan dasar itu, maka model POKM yang dikembangkan ini dapat diterapkan pada pembelajaran yang menerapkan prinsip-prinsip konstruktivisme yang cenderung berpusat pada peserta didik maupun prinsip-prinsip behaviorisme yang lebih berpusat pada guru.

Kaitan langsung teori belajar konstruktivisme kognitif dengan model POKM adalah sebagai berikut. Pada model POKM, ada sebuah fase yang dinamakan latihan mandiri. Pada fase itu peserta didik peserta didik dapat menjadi lebih mandiri dalam belajar. Melalui latihan yang kontinu peserta didik dapat mengambil inisiatif, dengan atau tanpa bantuan orang lain, dalam hal menentukan kegiatan belajarnya seperti merumuskan tujuan belajar, sumber belajar (baik berupa orang ataupun bahan), mendiagnosa kebutuhan belajar dan mengontrol sendiri proses pembelajarannya. Dengan demikian, pada fase ini model POKM menggunakan prinsip belajar menurut teori belajar konstruktivisme kognitif, yaitu konstruktivisme kognitif menekankan proses kognitif. Dalam hal ini, individu yang belajar memahami sesuatu sesuai dengan tahapan perkembangan kognitif dan cara belajarnya sendiri.

Sedangkan prinsip konstruktivisme Vygotsky yang berkaitan dengan model POKM adalah sebagai berikut.

- a. Pada model POKM, ada sebuah fase yang dinamakan simulasi penerapan keterampilan metakognitif (diskusi kelompok). Pada fase itu peserta didik secara langsung berinteraksi dengan peserta didik lain dalam kelompoknya. Dengan demikian, pada fase ini model POKM menggunakan prinsip pertama yang dikemukakan Vygotsky.
- a. *Zone of Proximal Development* adalah daerah sedikit di atas kemampuan peserta didik saat itu, artinya *Zone of Proximal Development* adalah daerah antara kemampuan faktual dan kemampuan potensial peserta didik, sehingga peserta didik memerlukan bantuan orang dewasa untuk memahami suatu materi yang tingkat kesulitannya berada pada *Zone of Proximal Development* anak. Pada fase diskusi kelompok dalam model

POKM, peserta didik saling berinteraksi dengan teman lain di mana tingkat keterampilan metakognitif dan tingkat kemandirian peserta didik dalam setiap kelompok berbeda. Diharapkan perbedaan tersebut menyebabkan anak yang tingkat keterampilan metakognitif dan tingkat kemandirian rendah akan banyak belajar dari anak yang tingkat keterampilan metakognitif dan kemandirian belajar tinggi, sehingga kemampuan potensial anak akan berkembang. Selain itu guru juga memberikan bimbingan kepada peserta didik yang membutuhkan tanpa bermaksud memberikan jawaban persoalan yang diberikan.

- b. Pada model POKM, ada sebuah fase yang dinamakan latihan terstruktur. Pada fase itu peserta didik secara langsung diberikan pelatihan keterampilan metakognitif. Dengan demikian, pada fase ini model POKM menggunakan prinsip ketiga yang dikemukakan Vygotsky
- c. Tugas guru dalam model POKM adalah memberi bimbingan dan arahan kepada peserta didik, dengan demikian model pembelajaran ini menggunakan prinsip keempat yang dikemukakan oleh Vygotsky, yaitu *scaffolding*.

Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (challenge) yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (routine procedure) yang sudah diketahui peserta didik. Suatu pertanyaan akan merupakan suatu masalah hanya jika seseorang tidak mempunyai aturan/hukum tertentu yang segera dapat dipergunakan untuk menemukan jawaban pertanyaan tersebut (Hudoyo, 1990). Suatu pertanyaan merupakan masalah bergantung kepada individu dan waktu. Artinya, suatu pertanyaan merupakan suatu masalah bagi seorang anak, tetapi mungkin

bukan merupakan suatu masalah bagi anak lain. Contoh, “Andi mempunyai 9 lusian gelas. Berapa banyak gelas yang dimiliki Andi?” adalah merupakan masalah bagi peserta didik SD kelas 1 (satu), namun bukan merupakan masalah bagi peserta didik SMP. Demikian juga suatu pertanyaan merupakan suatu masalah bagi seorang anak pada suatu saat, tetapi bukan merupakan suatu masalah lagi bagi anak tersebut saat berikutnya, bila anak sudah mengetahui cara atau proses mendapatkan penyelesaian masalah tersebut.

Menurut Schoen (1980), masalah berada diantara latihan komputasi (yang strategi solusinya segera diketahui) dan teka-teki (yang tidak mempunyai kondisi strategi solusi yang jelas dan mungkin hanya dimengerti problem solver yang terampil). Akibatnya seringkali seseorang yang tidak terampil mengalami kesulitan dalam menentukan apakah suatu soal termasuk masalah atau bukan masalah.

Bell (1978) mengemukakan bahwa suatu situasi merupakan masalah bagi seseorang jika ia menyadari: (1) adanya persoalan dalam situasi tersebut, (2) mengetahui bahwa persoalan tersebut perlu diselesaikan, (3) merasa ingin menyelesaikannya, (4) namun tidak dapat dengan segera menyelesaikannya.

Ruseffendi (2006) dan Schoen (1980) menyebutkan ada tiga syarat suatu persoalan dikatakan masalah. (1) apabila persoalan tersebut belum diketahui bagaimana prosedur menyelesaikannya. Persoalan yang sudah diketahui bagaimana cara menyelesaikannya hanyalah disebut dengan soal-soal rutin.

Misalnya soal seperti “nilai rata-rata dari 78, 65, 67, 83, 56, 73, 80, 74, 86, dan 96 adalah...” bagi peserta didik SMP merupakan soal rutin. Untuk menyelesaikan soal ini peserta didik hanya perlu melakukan komputasi dengan memakai rumus yang telah diketahuinya, (2) apabila persoalan tersebut sesuai tingkat berpikir dan pengetahuan prasyarat peserta didik, soal yang terlalu mudah atau sebaliknya terlalu sulit bukan merupakan masalah, (3) apabila peserta didik mempunyai niat untuk menyelesaikan persoalan tersebut.

Upaya memunculkan keinginan peserta didik agar mau mencari solusi, dapat dilakukan dengan cara membuat soal yang tingkat kesukarannya berada sedikit di atas kemampuannya namun tidak boleh di luar ZPD (*Zone of Proximal Development*) peserta didik yang bersangkutan. Misalnya soal berikut adalah salah satu contoh masalah bagi peserta didik SMP. Satu keranjang apel terdiri dari apel hijau dan apel merah. Seperlima diantaranya berupa apel hijau. Rata-rata berat apel hijau adalah 10 gram sedangkan rata-rata berat apel merah 80 gram. Berapakah rata-rata berat seluruh apel tersebut? Dengan bekal rumus untuk menghitung nilai rata-rata saja belum cukup bagi peserta didik untuk menyelesaikan soal tersebut. Peserta didik dituntut mengaitkannya dengan konsep perbandingan dan mencari strategi dalam menyelesaikannya.

Berkenaan dengan objek belajar matematika, Gagne memandang kemampuan pemecahan masalah matematis sebagai objek tak langsung dalam belajar matematika. Menurut Gagne, objek belajar matematika terdiri atas dua macam, yaitu objek langsung dan objek tidak langsung (Ruseffendi, 2006; Bell,

1978: 108). Objek yang terkait langsung dengan aktivitas belajar matematika meliputi fakta, keterampilan, konsep, dan aturan/prinsip. Keempat objek langsung ini dapat dibedakan antara satu dengan lainnya secara jelas karena masing-masing objek langsung tersebut dapat didefinisikan secara jelas. Sedangkan objek tidak langsung belajar matematika meliputi kemampuan pemecahan masalah, kemampuan inkuiri, kemandirian, sikap positif, dan tahu bagaimana semestinya belajar (learning to learn).

Pemecahan masalah matematika

Polya (1973) mengartikan pemecahan masalah sebagai satu usaha mencari jalan keluar dari satu kesulitan guna mencapai satu tujuan yang tidak begitu mudah segera untuk dicapai. Sedangkan menurut Hudoyo (1990) pemecahan masalah merupakan proses penerimaan masalah sebagai tantangan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

NCTM (2000), pemecahan masalah bukanlah sekedar tujuan dari belajar matematika tetapi merupakan alat utama untuk melakukan atau bekerja dalam matematika. Hal ini, sejalan dengan pernyataan Wahyudin (2003:3) pemecahan masalah bukan sekedar keterampilan untuk diajarkan dan digunakan dalam matematika tetapi juga merupakan keterampilan yang akan dibawa pada masalah-masalah keseharian peserta didik atau situasi-situasi pembuatan keputusan, dengan demikian kemampuan pemecahan masalah membantu seseorang secara baik dalam hidupnya.

Menurut Lester (Branca, 1980), kemampuan pemecahan masalah merupakan tujuan umum dalam pengajaran matematika, bahkan sebagai jantungnya matematika, artinya kemampuan pemecahan masalah merupakan kemampuan dasar dalam belajar matematika. Dengan mengajarkan peserta didik untuk menyelesaikan masalah akan memungkinkan peserta didik itu menjadi lebih analitis dalam mengambil keputusan dalam kehidupan (Cooney, 1975). Selanjutnya dikatakan, bila seseorang peserta didik dilatih untuk menyelesaikan masalah, maka peserta didik itu akan mampu mengambil keputusan, sebab peserta didik itu menjadi mempunyai keterampilan tentang bagaimana mengumpulkan informasi yang relevan, menganalisa informasi dan menyadari betapa perlunya meneliti kembali hasil yang telah diperolehnya.

Leeuw (Sudjimat, 1995) berpendapat bahwa belajar pemecahan masalah pada hakekatnya adalah belajar berpikir (*learning to think*) atau belajar bernalar (*learning to reason*), yaitu berpikir atau bernalar mengaplikasikan pengetahuan-pengetahuan yang telah diperoleh sebelumnya untuk memecahkan masalah-masalah baru yang belum pernah dijumpai. Selain itu Christensen & Martin (Killen, 1998), bahwa keuntungan dari pemecahan masalah adalah dapat mengembangkan kemampuan peserta didik dalam berpikir kritis dan juga dapat mengembangkan kemampuan mereka dalam beradaptasi terhadap situasi belajar mereka yang baru.

Menurut Copley (2000) ada empat jenis pengetahuan yang dikembangkan melalui pemecahan masalah, yaitu: (1) declarative knowledge; (2) procedural knowledge; (3) schematic knowledge; (4) metacognitive knowledge. Sedangkan Hudojo (1990) membagi

masalah dalam matematika menjadi enam bagian, yaitu: (1) rutin, (2) non-rutin, (3) rutin terapan, (4) rutin non-terapan, (5) non-rutin terapan, (6) non-rutin non-terapan. Masalah rutin adalah masalah yang prosedur penyelesaiannya sekedar mengulang, misalnya secara algoritmik. Masalah non-rutin adalah masalah yang prosedur penyelesaiannya memerlukan perencanaan penyelesaian, tidak sekedar menggunakan rumus, teori atau dalil. Masalah rutin terapan adalah masalah rutin yang dikaitkan dengan dunia nyata/kehidupan sehari-hari yang prosedur penyelesaiannya standar sebagaimana yang sudah diajarkan. Masalah rutin non-terapan adalah masalah rutin lebih ke matematikanya daripada dikaitkan dengan dunia nyata/kehidupan sehari-hari. Masalah non-rutin terapan adalah masalah yang penyelesaiannya menuntut perencanaan dengan mengaitkan dunia nyata/kehidupan sehari-hari dan penyelesaiannya tersebut mungkin saja open-ended. Masalah non-rutin non-terapan adalah masalah yang berkaitan murni tentang hubungan matematika.

Berkaitan dengan penyelesaian masalah, Polya (1973) mengajukan empat langkah fase penyelesaian masalah yaitu memahami masalah, merencanakan penyelesaian, menyelesaikan masalah dan melakukan pengecekan kembali semua langkah yang telah dikerjakan. Fase memahami masalah tanpa adanya pemahaman terhadap masalah yang diberikan, peserta didik tidak mungkin menyelesaikan masalah tersebut dengan benar, selanjutnya para peserta didik harus mampu menyusun rencana atau strategi. Penyelesaian masalah, dalam fase ini sangat tergantung pada pengalaman peserta didik lebih kreatif dalam menyusun penyelesaian suatu masalah, jika rencana penyelesaian satu masalah telah dibuat baik tertulis maupun tidak. Langkah selanjutnya adalah peserta didik mampu menyelesaikan masalah,

sesuai dengan rencana yang telah disusun dan dianggap tepat. Dan langkah terakhir dari proses penyelesaian masalah menurut Polya adalah melakukan pengecekan atas apa yang dilakukan. Mulai dari fase pertama hingga hingga fase ketiga. Dengan model seperti ini maka kesalahan yang tidak perlu terjadi dapat dikoreksi kembali sehingga peserta didik dapat menemukan jawaban yang benar-benar sesuai dengan masalah yang diberikan.

BAB III

PROTOTIPE RISET PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Studi ini merupakan kajian dan pengembangan (*Research and Developmen*), yaitu pengembangan Model Pembelajaran yang Mengoptimalkan Keterampilan Metakognitif (model POKM) yang memenuhi kriteria valid, praktis, menarik, dan efektif. Pada penelitian ini juga dikembangkan perangkat pembelajaran yang sesuai dengan model POKM dan instrumen penelitian yang sesuai dengan data yang diharapkan.

Model pengembangan yang digunakan untuk mengembangkan model pembelajaran ini mengacu pada model pengembangan pendidikan umum dari Plomp (1997). Produk dari proses pengembangan ini meliputi tiga aspek, yaitu: (1) model POKM, (2) perangkat pembelajaran, dan (3) instrumen. Berikut ini diuraikan masing-masing proses pengembangan tersebut.

Pengembangan model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (model POKM)

a. Fase investigasi awal

Berdasarkan analisis terhadap tuntutan lingkungan, maka permasalahan yang akan dikaji adalah mengembangkan model pembelajaran yang bertujuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah peserta didik. Oleh karena itu dalam fase ini dilakukan kajian terhadap (1) teori-teori belajar, (2) teori pemecahan masalah, (3) teori metakognisi, (4) model-model pembelajaran, (5) melakukan survei/penelitian pendahuluan tentang profil tingkat keterampilan metakognitif dan kemampuan pemecahan masalah peserta didik, (5) menganalisis kondisi lapangan yang selain terkait dengan kondisi peserta didik, kurikulum, guru, kegiatan pembelajaran, juga yang terkait dengan aspek-aspek keterampilan metakognisi dan kemampuan pemecahan masalah peserta didik.

Kaitannya dengan penelitian pendahuluan dan analisis kondisi lapangan, metode penelitian yang ditempuh adalah sebagai berikut:

- 1) Pelaksanaan penelitian pendahuluan dan analisis kondisi lapangan digunakan pendekatan kualitatif dan kuantitatif.
- 2) Penelitian pendahuluan, difokuskan pada bagaimana kondisi kemampuan pemecahan masalah dan pelaksanaan pembelajaran di kelas saat ini. Fokus penelitian diuraikan menjadi empat sub fokus, yaitu: (a) tingkat kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik, (b) model pembelajaran apa saja yang digunakan guru dalam pembelajaran di kelas, (c) kemampuan peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan

masalah, dan (d) bagaimana cara guru mengevaluasi hasil belajar?

3) Deskripsi fokus

Untuk memberikan arahan dan langkah yang operasional dalam pelaksanaan penelitian pendahuluan tentang kondisi saat ini yang berkaitan dengan pembelajaran di kelas, maka diberikan penjelasan sebagai berikut.

- a) Kemampuan pemecahan masalah adalah suatu proses untuk mengatasi kesulitan yang ditemui untuk mencapai suatu tujuan yang diinginkan, atau dengan kalimat lain pemecahan masalah sebagai usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan, mencapai suatu tujuan yang tidak dengan begitu saja segera dapat dicapai.
- b) Model pembelajaran yang dimaksud di atas adalah model pembelajaran yang digunakan guru setiap kali melakukan pembelajaran di kelas selama ini.
- c) Keterampilan metakognitif adalah keterampilan berpikir peserta didik untuk menyadari proses berpikirnya sendiri yang berkaitan dengan keterampilan prediksi, perencanaan, monitoring, dan evaluasi dalam pembelajaran (dalam menyelesaikan masalah/suatu tugas tertentu) dalam pembelajaran.
- d) Cara guru mengevaluasi hasil belajar yang dimaksud, adalah apakah guru menilai hasil belajar masih dominan menekankan pada penguasaan substansi materi ajar saja tanpa memperhatikan: keterampilan metakognitif peserta didik dalam menyelesaikan masalah/tugas dan kemampuan pemecahan masalah peserta didik.

- e) Dalam penelitian ini yang menjadi subjek untuk mendapatkan informasi tentang kondisi saat ini, yang berkaitan dengan pembelajaran di kelas adalah guru mata pelajaran, yang terdiri dari 6 orang guru berasal dari 5 SMA Negeri di kota Parepare. Seangkan subjek untuk mendapatkan data tentang tingkat kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik dan kemampuan peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah adalah peserta didik.
- f) Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini adalah: (a) interview bebas terpimpin, (b) tes, dan (c) obeservasi non sistematis. Dalam hal ini observasi yang dilakukan adalah observer turut memantau berlangsungnya proses pembelajaran di kelas yang dilaksanakan oleh guru di SMA bersangkutan.
- g) Yang bertindak sebagai instrumen dalam penelitian pendahuluan, untuk mengumpulkan informasi tentang kondisi saat ini, yang berkaitan dengan pembelajaran di kelas adalah peneliti sendiri. Sedangkan untuk mengumpulkan data tentang tingkat kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik dan kemampuan peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah digunakan instrument berupa tes.
- h) Teknik analisis data. Teknis analisis data yang digunakan dalam penelitian pendahuluan adalah analisis data kuantitatif dan kualitatif. Analisis data kuantitatif digunakan statistik deskriptif. Sedangkan analisis kualitatif mengikuti konsep yang diberikan Miles and Huberman dalam Sugiyono (2016), yaitu reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan dan verifikasi.

b. Fase desain

Pada fase ini dirancang model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif. Kegiatan yang dilakukan pada fase ini meliputi: (1) merancang sintaks pembelajaran yang mengetengahkan urutan atau fase pembelajaran yang diharapkan dapat mengotimalkan keterampilan metakognitif, (2) merancang lingkungan belajar atau sistem sosial, yaitu situasi atau suasana dan norma yang berlaku dalam model POKM, seperti peran guru dan aktivitas yang harus dilakukan peserta didik selama pembelajaran berlangsung, (3) merancang prinsip reaksi, yaitu memberikan gambaran kepada guru bagaimana harus memberikan intervensi kepada peserta didik serta bagaimana memandang dan merespons setiap perilaku yang ditunjukkan oleh peserta didik selama pembelajaran, (4) merancang sistem pendukung, yaitu syarat/kondisi yang diperlukan agar model pembelajaran yang sedang dirancang dapat terlaksana, seperti setting kelas, sistem instruksional, perangkat pembelajaran, fasilitas belajar, dan media yang diperlukan dalam pembelajaran, (5) merancang dampak dari pembelajaran. Dampak disini ada dua macam yaitu dampak instruksional dan dampak pengiring. Dampak instruksional adalah dampak yang merupakan akibat langsung dari pembelajaran atau hasil belajar yang dicapai dengan mengarahkan para peserta didik pada tujuan yang diharapkan. Sedangkan dampak pengiring adalah akibat tidak langsung dari pembelajaran atau hasil belajar lainnya yang dihasilkan oleh suatu proses belajar mengajar, sebagai akibat terciptanya suasana belajar yang dialami oleh peserta didik tanpa pengarahan dari guru.

c. Fase realisasi

Pada fase ini disusun suatu model pembelajaran sebagai lanjutan dari fase desain. Kegiatan yang dilakukan pada fase ini meliputi: (1) menyusun sintaks pembelajaran yang menetengahkan urutan atau fase pembelajaran yang diharapkan dapat mengoptimalkan keterampilan metakognitif peserta didik, (2) menentukan lingkungan belajar atau sistem sosial, yaitu situasi atau suasana dan norma yang berlaku dalam model POKM, seperti peran guru dan aktivitas yang harus dilakukan peserta didik selama pembelajaran berlangsung, (3) menyusun prinsip reaksi, yaitu memberikan gambaran kepada guru bagaimana harus memberikan intervensi kepada peserta didik serta bagaimana memandang dan merespons setiap perilaku yang ditunjukkan oleh peserta didik selama pembelajaran, (4) menentukan sistem pendukung, yaitu syarat/kondisi yang diperlukan agar model pembelajaran yang sedang dirancang dapat terlaksana, seperti setting kelas, sistem instruksional, perangkat pembelajaran, fasilitas belajar, dan media yang diperlukan dalam pembelajaran, (5) menyusun dampak dari pembelajaran. Model pembelajaran hasil dari fase ini selanjutnya disebut dengan prototipe-1. Adapun produk prototipe-1 model POKM tersebut diwujudkan dalam bentuk “Buku Model POKM”.

d. Fase tes, evaluasi, dan revisi model pembelajaran

Fase ini difokuskan pada dua hal, yakni: (1) memvalidasi dan (2) mengadakan uji coba lapangan prototipe-1 (model POKM) beserta perangkat-perangkat dan instrumen-instrumen yang akan digunakan/yang telah disusun. Adapun kegiatan yang dilakukan pada fase ini secara rinci adalah sebagai berikut.

1) Memvalidasi Prototipe-1 (model POKM)

Kegiatan yang dilakukan pada waktu memvalidasi model adalah sebagai berikut.

- a) Meminta pertimbangan ahli secara teoretis tentang kelayakan prototipe model pembelajaran yang telah disusun. Untuk kegiatan ini diperlukan instrumen berupa lembar validasi yang diserahkan kepada validator.
- b) Melakukan analisis terhadap hasil validasi dari validator. Jika hasil analisis menunjukkan prototipe-1 (model POKM): (1) valid tanpa revisi, maka kegiatan selanjutnya adalah uji coba lapangan, (2) valid dengan revisi kecil, maka dilakukan revisi yang selanjutnya menghasilkan prototipe-2. Setelah diperoleh prototipe-2, dilakukan ujicoba lapangan, (3) tidak valid, maka dilakukan revisi besar sehingga diperoleh prototipe-2. Kemudian kembali pada kegiatan (a), yaitu meminta pertimbangan ahli. Disini ada kemungkinan terjadi siklus.

2) Mengadakan uji coba lapangan

Uji coba dilakukan untuk melihat apakah model pembelajaran yang dikembangkan (prototipe-2 yang telah dinyatakan valid) bersifat praktis dan efektif. Untuk melakukan kegiatan ini diperlukan suatu perangkat pembelajaran. Karena perangkat yang ada selama ini tidak memadai untuk pelaksanaan uji coba, maka disusun suatu perangkat pembelajaran untuk suatu topik tertentu yang sesuai dengan model POKM dan telah melalui proses validasi. Untuk melihat kepraktisan dan keefektifan model pembelajaran, diperlukan suatu data. Untuk memperoleh data tersebut diperlukan suatu instrumen.

Sehingga disusun instrumen yang sesuai dengan tujuan yang diinginkan. Adapun kegiatan yang dilakukan pada waktu uji coba adalah: (a) melakukan uji coba lapangan, (b) melakukan analisis terhadap hasil uji coba lapangan, (c) melakukan revisi berdasarkan hasil analisis dari hasil uji coba.

Uji coba, analisis, dan revisi ini mungkin dilakukan lebih dari satu kali sampai diperoleh prototipe final model POKM yang memenuhi kriteria kepraktisan dan keefektifan, selain syarat kevalidan yang terlebih dahulu telah dipenuhi. Dalam proses uji coba ini, selain memperoleh model, juga diperoleh perangkat pembelajaran yang baik dan sesuai dengan model pembelajaran.

e. Implementasi

Kegiatan yang dilakukan pada fase ini, meminta tanggapan dan koreksi dari guru tentang kelayakan prototipe model pembelajaran yang telah disusun dan uji coba I. Selanjutnya dilakukan revisi terhadap hasil tanggapan atau koreksi dari guru sebelum uji coba II.

Untuk keperluan pengembangan model POKM ini, dibutuhkan perangkat pembelajaran. Perangkat pembelajaran yang dikembangkan adalah (1) rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP), (2) buku peserta didik dan guru, (3) lembar kegiatan peserta didik (LKPD), dan (4) brosur strategi metakognitif. Berikut dibahas secara rinci tentang pengembangan perangkat pembelajaran.

Pengembangan perangkat pembelajaran untuk model POKM ini, mengacu pada model pengembangan pendidikan umum dari Plomp (1997) yang terdiri dari beberapa fase yaitu (1) fase investigasi awal, (2) fase desain, (3) fase realisasi, dan (4) fase tes,

evaluasi, dan revisi, (5) Implementasi. Berikut rincian dari kegiatan yang dilakukan selama pengembangan.

a. Fase investigasi awal

Kegiatan yang dilakukan pada fase investigasi awal adalah mengembangkan perangkat pembelajaran yang sesuai dengan rancangan model POKM. Pada fase-1 ini dilakukan investigasi awal atau identifikasi terhadap kondisi saat ini, meliputi: (a) kondisi peserta didik, (b) kondisi guru, (c) tuntutan lingkungan terhadap pembelajaran, dan (d) kurikulum yang berlaku.

Perangkat pembelajaran yang dikaji pada fase-1 ini meliputi: (a) teori-teori pengembangan perangkat pembelajaran, (b) kondisi saat ini tentang perangkat-perangkat pembelajaran yang secara umum digunakan oleh guru, misalnya RPP, buku peserta didik dan guru, LKPD. Kondisi-kondisi ini seluruhnya akan dikaitkan dengan kemungkinan pengoptimalan keterampilan metakognisi peserta didik dalam pembelajaran.

Data tentang pengembangan perangkat pembelajaran yang sesuai dengan model POKM yang akan dirancang, akan dikumpulkan dengan menggunakan instrumen penelitian. Kegiatan-kegiatan yang dilakukan pada tahap investigasi awal tentang instrumen yang dibutuhkan ini meliputi (a) teori-teori pengembangan instrumen yang difokuskan pada hanya teori-teori yang mendukung pengembangan model POKM dan perangkat-perangkatnya, dan (b) kondisi saat ini yang terkait dengan pengembangan instrumen yang dibutuhkan, apakah sudah tersedia atau belum?, bilamana ya, apakah perlu dimodifikasi atau tidak?.

Untuk memperoleh model POKM yang berkualitas (valid, praktis, menarik, dan efektif), dalam proses pengembangan model dibutuhkan data tentang kevalidan, kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifan. Dengan demikian dibutuhkan pula adanya alat pengumpul data kevalidan, kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifan tersebut, sehingga jenis-jenis instrumen kevalidan, kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifan sudah dipikirkan pada fase-1 ini. Untuk maksud itulah sehingga secara garis besar ada 4 (empat) jenis instrumen yang diperlukan, yaitu instrumen kevalidan, instrumen kepraktisan, instrumen kemenarikan, dan instrumen keefektifan.

b. Fase desain

Pada fase ini dirancang perangkat pembelajaran sesuai dengan model POKM. Perangkat-perangkat yang dirancang, yaitu RPP, buku peserta didik dan guru, LKPD, brosur keterampilan metakognitif.

Data tentang perangkat yang sementara dikembangkan, dikumpulkan dengan menggunakan instrumen. Instrumen yang diperlukan meliputi instrumen kevalidan, instrumen kepraktisan, instrumen kemenarikan, dan instrumen keefektifan.

c. Fase realisasi

Pada fase ini dibuat/disusun suatu perangkat pembelajaran sesuai dengan model POKM. Perangkat pembelajaran hasil dari fase-3 ini selanjutnya disebut dengan prototipe-1. Perangkat-perangkat yang dibuat tersebut meliputi: RPP, buku peserta didik dan guru, LKPD, dan brosur keterampilan metakognitif. Berikut

dijelaskan secara rinci tahap-tahap yang dilakukan dalam pengembangan perangkat-perangkat pembelajaran.

1) Rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP)

Rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP) yang disusun didasarkan pada komponen-komponen model POKM (prototipe-1) terutama komponen sintaks. RPP ini merupakan persiapan guru melaksanakan pembelajaran untuk tiap pertemuan dan berfungsi sebagai acuan untuk melaksanakan proses pembelajaran di kelas. Komponen utama RPP yang disusun mengikuti format RPP berdasarkan Kurikulum tahun 2006 atau yang lebih dikenal dengan KTSP, yaitu (1) Kompetensi Dasar (KD), (2) Indikator Pencapaian Hasil Belajar, (3) Model Pembelajaran, (4) Metode Pembelajaran, (5) Sumber Pembelajaran, (6) Alat dan Bahan Pembelajaran, (7) Langkah-langkah Kegiatan Pembelajaran, (8) Penilaian. Alasan menggunakan kurikulum tahun 2006 (KTSP), karena keempat SMA Negeri di Parepara masih menggunakan kurikulum tersebut, termasuk sekolah tempat uji coba lapangan. Perlu ditekankan bahwa kegiatan pembelajaran model POKM yang disusun, juga menggunakan penggabungan prinsip-prinsip “pembelajaran berpusat pada peserta didik (*student oriented*)” dan “pembelajaran berpusat pada guru (*teacher oriented*)”. Dalam artian, model POKM dapat diterapkan pada pembelajaran yang berpusat pada peserta didik maupun pada pembelajaran yang berpusat pada guru, baik secara terpisah maupun dalam bentuk penggabungan. Dalam proses pembelajaran, peserta didik menempati posisi sentral sebagai subyek belajar. Keberhasilan tidak semata-mata diukur dengan penguasaan materi, tetapi juga sejauhmana kemampuan

peserta didik menerapkan keterampilan metakognisinya dalam menyelesaikan tugas tertentu, serta meningkatkan kemampuan pemecahan masalah.

2) Buku peserta didik dan guru

Buku peserta didik dan guru yang disusun mengacu pada komponen-komponen model POKM (prototipe-1) terutama komponen sintaks. Buku peserta didik berfungsi sebagai panduan bagi peserta didik dalam mengikuti proses pembelajaran dan buku guru berfungsi sebagai panduan bagi guru dalam mengelola pembelajaran. Penyajian materi dalam buku peserta didik dan buku guru dirancang dalam bentuk perpaduan antara penyampaian materi secara langsung dan proses pengkonstruksian pengetahuan oleh peserta didik. Ciri khas buku peserta didik dalam mode POKM adalah adanya pelatihan penerapan keterampilan metakognitif bagi peserta didik seperti: keterampilan memprediksi, keterampilan merencanakan, keterampilan memantau, dan keterampilan mengevaluasi.

3) Lembar kegiatan peserta didik (LKPD)

Lembar kegiatan peserta didik yang disusun juga didasarkan pada komponen-komponen model POKM (prototipe-1). LKPD dirancang dalam bentuk tugas-tugas yang dikerjakan secara berkelompok yang disertai pelatihan penerapan keterampilan metakognitif dalam mempelajari materi ajar dan menyelesaikan tugas tertentu, yang meliputi: keterampilan prediksi (*prediction skills*), keterampilan perencanaan (*planning skills*), keterampilan monitoring (*monitoring skill*), keterampilan evaluasi (*evaluation skills*).

4) Brosur keterampilan metakognisi

Brosur keterampilan metakognitif yang disusun memuat keterampilan prediksi (*prediction skills*), keterampilan perencanaan (*planning skills*), keterampilan monitoring (*monitoring skills*), dan keterampilan evaluasi (*evaluation skills*) dalam menyelesaikan tugas tertentu. Contoh penerapan keterampilan metakognitif pada pembelajaran dalam menyelesaikan tugas tertentu yang meliputi: (1) memprediksi hasil yang akan diperoleh, (2) merencanakan penyelesaian tugas yang sedang dikerjakan, (3) mengawasi kemajuan pekerjaannya, dan (4) mengevaluasi kemajuan.

d. Fase Tes, Evaluasi, dan Revisi.

Fase ini dimaksudkan untuk mengetahui tiga hal, yakni: (1) apakah perangkat pembelajaran (prototipe-1) yang telah didisain dan disusun secara rinci pada fase kedua dan ketiga sudah layak menurut pertimbangan ahli, (2) apakah secara praktis dapat diterapkan di kelas, dan (3) apakah tujuannya tercapai, yaitu mengoptimalkan keterampilan metakognitif dan meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik. Berikut dijelaskan secara rinci aktivitas yang dilakukan dalam fase ini.

- 1) Kelayakan dari prototipe-1 di atas, dapat dilihat pada kegiatan awal fase ini. Kegiatan awal yang akan dilakukan adalah meminta pertimbangan ahli dan guru tentang perangkat pembelajaran prototipe-1 yang telah disusun. Kemudian dilakukan analisis terhadap hasil penilaian ahli. Hasil analisis terhadap hasil penilaian ahli ada 3 kemungkinan, yakni:

- a) Hasil analisis menunjukkan bahwa perangkat yang dikembangkan layak tanpa revisi. Jika hasil analisis menunjukkan demikian, maka perangkat tersebut tidak direvisi dan sudah dapat langsung dilakukan uji coba lapangan untuk mengetahui kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifannya.
 - b) Hasil analisis menunjukkan bahwa perangkat yang dikembangkan layak dengan revisi. Jika demikian, maka dilakukan revisi sehingga diperoleh prototipe-2. Setelah diperoleh prototipe-2 dilakukan uji coba lapangan untuk mengetahui kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifannya.
 - c) Hasil analisis menunjukkan bahwa perangkat yang dikembangkan tidak layak. Jika hasil analisis menunjukkan demikian, maka dilakukan revisi sehingga diperoleh prototipe-2. Setelah diperoleh prototipe-2, dilakukan validasi ulang oleh ahli/praktisi, untuk melihat kelayakannya. Di sini kemungkinan terjadi siklus. Siklus ini akan berhenti jika sudah diperoleh perangkat pembelajaran yang valid.
- 2) Untuk melihat apakah perangkat pembelajaran yang telah valid tersebut juga mencapai hasil yang diinginkan dalam pelaksanaan di lapangan, maka dilakukan uji coba lapangan. Setelah uji coba lapangan, dilakukan analisis untuk melihat apakah perangkat-perangkat itu dapat diterapkan dengan baik dan apakah sudah memenuhi sifat praktis, menarik, dan efektif? Jika hasil menunjukkan belum mencapai tujuan tersebut, maka dilakukan revisi dan kembali melakukan uji coba lapangan. Pada saat ini juga ada kemungkinan terjadi siklus. Siklus akan berhenti jika sudah diperoleh perangkat pembelajaran yang

sesuai dengan yang diharapkan yakni sampai diperoleh prototipe final yang memenuhi kriteria yang telah ditetapkan.

Untuk mengetahui bahwa model POKM yang diperoleh berkualitas (valid, praktis, menarik dan efektif), dalam proses pengembangan model dibutuhkan data tentang kevalidan, kepraktisan, kemenarikan dan keefektifan. Untuk mengumpulkan data kevalidan, kepraktisan, kemenarikan dan keefektifan tersebut, dibutuhkan instrumen sebagai alat pengumpul data. Sehingga jenis-jenis instrumen kevalidan, kepraktisan, kemenarikan dan keefektifan perlu dikembangkan.

Instrumen penelitian yang diperlukan ada empat jenis yaitu a) lembar observasi, (b) angket, c) lembar tes, dan d) lembar validasi. Lembar observasi yang digunakan dalam penelitian ini ada dua yaitu: (1) lembar observasi aktivitas peserta didik, (2) lembar observasi keterlaksanaan pembelajaran model POKM. Angket meliputi: (1) angket respons peserta didik tentang penerapan model POKM, (2) angket respons guru tentang model POKM, (3) angket respons peserta didik terhadap LKPD, dan (4) angket kemenarikan peserta didik tentang model POKM. Lembar tes yang digunakan dalam penelitian ini adalah lembar tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika. Sedangkan lembar validasi yang digunakan dalam penelitian ini meliputi: (1) lembar validasi/penilaian model POKM, (2) lembar validasi/penilaian buku peserta didik dan guru, (3) lembar validasi/penilaian RPP, (3) lembar validasi/penilaian LKPD, (4) lembar validasi lembar observasi aktivitas guru, (6) lembar validasi lembar observasi aktivitas peserta didik dan guru, (7) lembar validasi angket respons peserta didik, (8) lembar validasi angket kemenarikan peserta didik tentang model POKM, (9) lembar

validasi lembar observasi keterlaksanaan pembelajaran model POKM, (11) lembar validasi tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika. Berikut dijelaskan secara rinci tahap-tahap yang dilakukan dalam realisasi dari pengembangan instrument (lembar observasi, angket, lembar tes, dan lembar validasi).

(1) Realisasi lembar observasi

Data tentang keterlaksanaan (kepraktisan) dan keefektifan model POKM dapat diperoleh dengan menggunakan lembar observasi. Oleh karena itu, pada fase-3 ini disusun lembar observasi. Lembar observasi yang disusun meliputi: (1) lembar observasi keterlaksanaan model POKM, (2) lembar observasi aktivitas peserta didik. Lembar observasi tersebut merupakan modifikasi dari lembar observasi yang telah dikembangkan oleh Ratumanan (2003), Jaeng (2004), Habibah (2006) dan Nurdin (2007). Modifikasi dilakukan berdasarkan hasil diskusi dengan teman sejawat. Keempat lembar observasi tersebut masing-masing mencakup tiga komponen, yaitu petunjuk, aspek-aspek pengamatan, dan hasil pengamatan. Komponen petunjuk mencakup cara pengisian lembar observasi terhadap aspek-aspek yang diamati. Aspek-aspek pengamatan untuk lembar observasi aktivitas peserta didik meliputi aktivitas yang mungkin dilakukan peserta didik selama proses pembelajaran. Sedangkan untuk lembar observasi keterlaksanaan model POKM, aspek-aspek pengamatan meliputi keterlaksanaan sintaks, sistem sosial, dan prinsip reaksi, serta ketersediaan sistem pendukung.

(2) Realisasi angket respons peserta didik dan angket kemenarikan peserta didik terhadap Model POKM

Data tentang respons atau tanggapan peserta didik terhadap pelaksanaan model POKM, respons peserta didik terhadap LKPD, respons peserta didik terhadap buku ajar, akan dikumpulkan dengan angket respons peserta didik. Sehingga pada fase-3 ini disusun/dibuat angket respons peserta didik yang mencakup dua hal pokok, yaitu (1) respons peserta didik terhadap komponen-komponen pembelajaran model POKM, LKPD, dan buku peserta didik, (2) respons peserta didik terhadap dampak penerapan model POKM, LKPD, dan buku peserta didik terhadap dirinya. Sedangkan untuk mengumpulkan data tentang kemenarikan peserta didik, dibutuhkan angket kemenarikan peserta didik. Data kemenarikan peserta didik dikumpulkan untuk mengukur kualitas model POKM. Sehingga pada fase-3 ini juga disusun/dibuat angket kemenarikan peserta didik.

Sebelum angket ini digunakan, terlebih dahulu akan dilakukan validasi oleh beberapa orang validator. Melalui lembar validasi angket respons peserta didik, validator diminta untuk menganalisis dan menilai kejelasan aspek petunjuk, kesesuaian item-item pertanyaan dengan tujuannya, dan aspek penggunaan bahasa. Berdasarkan hasil validasi tersebut dilakukan revisi, baik revisi kalimat maupun penggantian beberapa item pertanyaan. Angket hasil revisi ini selanjutnya siap untuk digunakan dalam uji coba pembelajaran dengan model POKM di sekolah.

(3) Realisasi lembar tes

Data tentang hasil belajar akan dikumpulkan dengan menggunakan lembar tes. Oleh sebab itu pada fase-3 ini perlu disusun/dibuat lembar tes. Data hasil belajar dikumpulkan untuk mengukur keefektifan model POKM. Lembar tes hasil belajar yang disusun adalah tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika yang meliputi: (1) memprediksi hasil yang akan diperoleh, (2) merencanakan penyelesaian tugas yang sedang dikerjakan, (3) memantau pekerjaannya, (4) mengevaluasi kemajuan hasil yang akan diperoleh. Tes tersebut mencakup tiga komponen, yaitu kisi-kisi tes, butir-butir tes, dan rubrik penilaian.

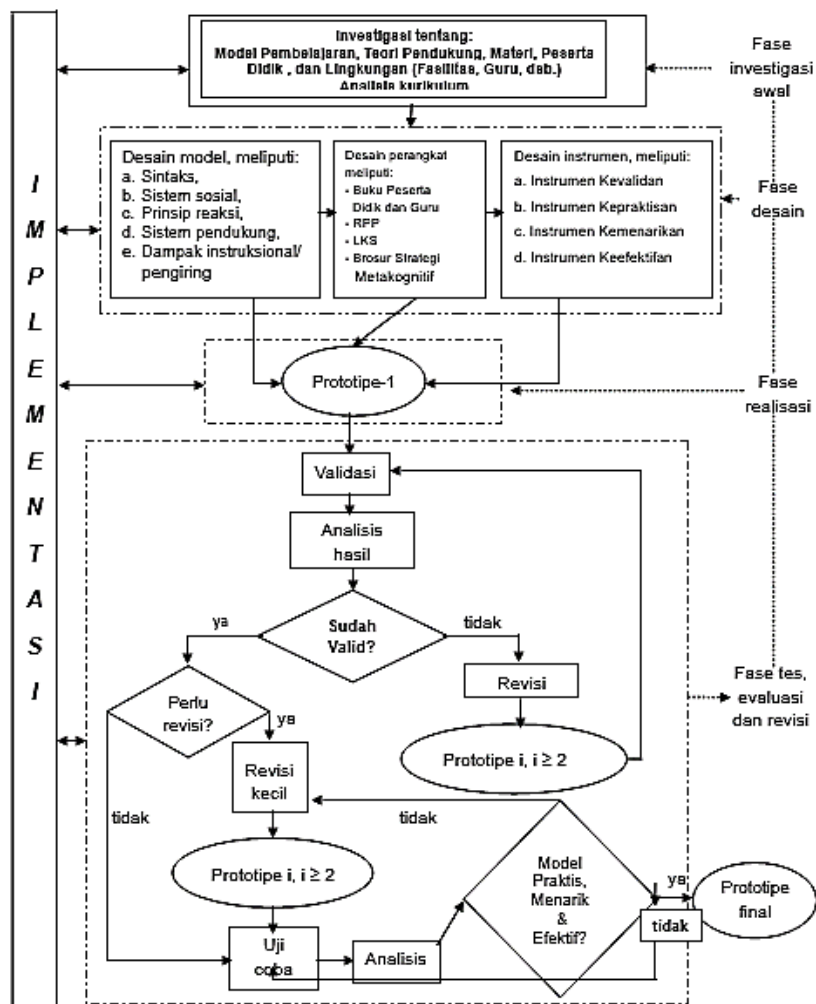
(4) Realisasi lembar validasi/penilaian

Data tentang kevalidan model pembelajaran beserta perangkat-perangkatnya, akan dikumpulkan dengan menggunakan lembar angket validasi/penilaian. Oleh sebab itu, dalam fase-3 ini disusun angket/lembar validasi, yaitu (1) angket/lembar validasi penilaian model POKM, (2) angket/lembar validasi lembar observasi keterlaksanaan pembelajaran model POKM, (3) angket/lembar validasi lembar observasi pengelolaan pembelajaran dengan model POKM, (4) angket/lembar validasi lembar observasi aktivitas peserta didik dan guru, (5) angket/lembar validasi RPP, (6) angket/lembar validasi LKPD, (8) angket/lembar validasi angket respons peserta didik, (9) angket/lembar validasi tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, dan (10) angket/lembar validasi angket kemenarikan peserta didik terhadap model POKM, (11) angket/lembar validasi penilaian

model POKM, (12) angket/lembar validasi penilaian buku peserta didik dan guru, (13) angket validasi penilaian LKPD, (14) angket/lembar validasi penilaian RPP.

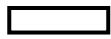
Isi dari angket/lembar validasi tersebut disusun berdasarkan teori-teori pengembangan instrumen dan teori-teori tentang aspek-aspek yang akan divalidasi. Adapun tentang bentuknya, dimodifikasi dari format-format yang sudah ada yang dikembangkan oleh Ratumanan (2003), Jaeng (2004), Habibah (2006) dan Nurdin (2006). Modifikasi disesuaikan dengan tujuan penelitian dan dilakukan melalui hasil diskusi dengan teman sejawat yang telah dan sementara melakukan penelitian pengembangan. Mengingat angket/lembar validasi tersebut sudah bersifat lazim dan umum, sehingga hasil modifikasi yang diperoleh tidak lagi melalui proses validasi.

Seluruh kegiatan proses pengembangan model POKM beserta perangkat dan instrumen yang sesuai, sebagaimana telah diuraikan di atas dapat digambarkan dalam satu diagram alur yang telah dimodifikasi dari model PMKM oleh Nurdin (2016), berikut ini.



Gambar 3.1. Alur Kegiatan Pengembangan Model-POKM

Keterangan :



: Proses kegiatan



: Syarat/ kriteria produk



: Hasil kegiatan



: Kegiatan timbal balik antara tahapan pengembangan dengan implementasi yang tengah berjalan



: Alur utama kegiatan



: Siklus tahapan bila diperlukan



: Siklus kegiatan bila diperlukan

BAB IV

JENIS-JENIS INSTRUMEN DALAM PENELITIAN PEMECAHAM MASALAH MATEMATIKA

Jenis-jenis instrumen adalah sangat penting dalam sebuah kajian riset, termasuk riset tentang pemecahan masalah matematika. Terkait dengan instrumen, hal ini tentu saja akan menentukan kualitas data. Berikut adalah penjelasan tentang data.

- a. Data tentang kevalidan model berupa pernyataan tentang kevalidan model yang dikembangkan. Sumber data adalah beberapa orang ahli yang kompeten dalam bidang pengembangan model pembelajaran.
- b. Data dan sumber data tentang kepraktisan. Data berupa (1) pernyataan tentang dapat atau tidaknya model yang dikembangkan ini diterapkan dan (2) hasil pelaksanaan pembelajaran, (3) hasil respon guru tentang model POKM. Sumber data tentang dapat atau tidaknya model yang dikembangkan ini diterapkan adalah beberapa orang ahli yang kompeten dalam bidang pengembangan model pembelajaran dan guru yang melaksanakan pembelajaran. Sumber data untuk

hasil pelaksanaan pembelajaran adalah proses pelaksanaan pembelajaran di kelas dengan menerapkan model POKM. Sumber data untuk hasil respon guru tentang model POKM adalah tanggapan guru terhadap model POKM.

- c. Data dan sumber data tentang kemenarikan model. Datanya berupa pernyataan menarik atau tidaknya model yang dikembangkan. Sumber data tentang menarik atau tidaknya model yang dikembangkan adalah setiap peserta didik yang telah diajar dengan model POKM.
- d. Data dan sumber data tentang keefektifan model. Datanya berupa (1) hasil belajar, meliputi: kemampuan peserta didik dalam pemecahan masalah matematika, kemampuan peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, ketuntasan peserta didik dalam belajar materi “Lingkaran”, (2) aktivitas peserta didik, (3) respons positif peserta didik terhadap pembelajaran. Data tentang aktivitas peserta didik ada 2 jenis yaitu (i) data aktivitas peserta didik dalam kegiatan pembelajaran dan (ii) data kesesuaian aktivitas peserta didik dengan aktivitas peserta didik ideal. Sumber data adalah peserta didik yang dikenai model pembelajaran yang sedang dikembangkan. Data tentang keefektifan diperoleh dari uji coba lapangan. Oleh karena itu data tersebut berkaitan langsung dengan data untuk pengembangan perangkat pembelajaran.

Selanjutnya, data dan sumber data yang diperlukan untuk pengembangan perangkat pembelajaran adalah sebagai berikut.

- a. Data hasil penilaian ahli terhadap perangkat pembelajaran berupa pernyataan tentang kevalidan perangkat pembelajaran yang dikembangkan. Sumber data adalah beberapa orang ahli

yang kompeten dalam bidang pengembangan perangkat pembelajaran.

- b. Data hasil uji coba. Data berupa hasil pelaksanaan pembelajaran yaitu, meliputi keterlaksanaan pembelajaran, kemenarikan peserta didik, aktivitas peserta didik, dan respons peserta didik terhadap pelaksanaan pembelajaran dengan perangkat pembelajaran yang sesuai model POKM sedang dikembangkan. Data ini digunakan untuk mendukung dan menyimpulkan bahwa model POKM yang dikembangkan memenuhi kriteria kepraktisan, kemenarikan, dan keefektifan. Sumber data adalah proses pelaksanaan pembelajaran di kelas dengan menggunakan perangkat pembelajaran yang sesuai dengan model POKM.

1. Instrumen kevalidan

Nilai kevalidan diperoleh dengan menggunakan instrumen meliputi: (1) angket/lembar validasi kevalidan model POKM, angket/lembar validasi kevalidan buku peserta didik dan guru, angket/lembar validasi kevalidan LKPD, angket/lembar validasi kevalidan RPP, (2) angket/lembar validasi kevalidan instrumen, yang meliputi: (a) angket validasi penilaian model POKM, (b) angket validasi lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM, (c) angket validasi lembar pengamatan pengelolaan pembelajaran dengan model POKM, (d) angket validasi lembar pengamatan aktivitas peserta didik dalam pembelajaran dengan model POKM, (e) angket validasi lembar pengamatan aktivitas guru dalam pembelajaran dengan model POKM, (f) angket validasi tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah. Instrumen-instrumen tersebut dimodifikasi dari instrumen-instrumen sejenis yang telah dikembangkan oleh Ratumanan (2003), Jaeng (2004),

Habibah (2006) dan Nurdin (2007). Semua instrumen tersebut sebelum digunakan terlebih dahulu divalidasi oleh beberapa orang pakar dan praktisi. Instrumen tersebut dapat digunakan untuk menilai model POKM apabila hasil analisis menunjukkan bahwa: (1) keseluruhan aspek lembar penilaian model dinilai valid, (2) lembar penilaian model reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas.

2. Instrumen kepraktisan

Nilai kepraktisan diperoleh dengan menggunakan 2 (dua) instrument, yaitu (1) lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM dan (2) angket respons guru tentang penerapan model POKM. Instrumen lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM ini terdiri atas 5 (lima) komponen yaitu: (a) sintaks, (b) sistem sosial, (c) prinsip reaksi (perilaku guru), (d) sistem pendukung, (e) komentar/saran-saran. Sedangkan instrument angket respons guru tentang penerapan model POKM ini terdiri atas 16 item.

Sebelum instrumen ini digunakan untuk menilai kepraktisan model POKM terlebih dahulu divalidasi oleh beberapa orang pakar dan praktisi dalam bidang pendidikan. Instrumen tersebut dapat digunakan untuk menilai kepraktisan model POKM apabila hasil analisis penilaian pakar dan praktisi menunjukkan: (a) keseluruhan komponen lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM dan angket respons guru tentang penerapan model POKM dinilai valid, (b) lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM dan angket respons guru tentang penerapan model POKM reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas.

3. Instrumen kemenarikan

Nilai kemenarikan diperoleh dengan menggunakan instrument berupa lembar angket kemenarikan model POKM dengan skala Guttman. Angket kemenarikan peserta didik ini dibuat untuk memperoleh salah satu jenis data pendukung kriteria model POKM berkualitas. Angket tersebut berisi petunjuk dan aspek-aspek kemenarikan peserta didik, yang terdiri atas 5 (lima) komponen meliputi (1) perhatian terhadap pembelajaran, (2) ketertarikan terhadap pembelajaran, (3) percaya diri dalam mengikuti pembelajaran, (4) kepuasan terhadap pelaksanaan pembelajaran, (5) kesadaran sendiri dalam belajar. Dari lima komponen disebar menjadi 19 item. Item-item tersebut terdiri dari pernyataan berupa pernyataan *favorabel*. Setiap item memiliki dua alternatif jawaban dengan skor yang berbeda-beda, dengan perincian 1 untuk jawaban “Ya”, 0 untuk jawaban “Tidak”.

Sebelum angket tersebut digunakan terlebih dahulu dinilai oleh beberapa pakar dan praktisi dibidang pendidikan. Angket tersebut dapat digunakan apabila hasil penilaian pakar dan praktisi diperoleh kesimpulan bahwa: (1) seluruh komponen angket kemenarikan peserta didik dinilai valid, (2) angket kemenarikan peserta didik tentang penerapan model POKM reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas, (4) angket kemenarikan peserta didik tentang penerapan model POKM dapat digunakan dengan revisi kecil.

4. Instrumen keefektifan

Nilai keefektifan model POKM diperoleh dengan menggunakan instrument berupa: (a) tes kemampuan pemecahan masalah matematika dan tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika (b) lembar pengamatan aktivitas peserta didik, (c) angket respons peserta didik tentang (penerapan model POKM, buku peserta didik, LKPD). Instrumen keefektifan yang akan dikembangkan diuraikan sebagai berikut.

a. Tes kemampuan pemecahan masalah dan tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika

Tes kemampuan pemecahan masalah dan tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah dibuat dengan tujuan untuk memperoleh informasi tentang kemampuan pemecahan masalah dan kemampuan peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika pokok bahasan "Lingkaran" setelah mengikuti kegiatan pembelajaran dengan model POKM. Tes ini dibuat dalam bentuk satu paket, disusun dengan mengacu pada kompetensi dasar dan indikator pemecahan masalah, indikator keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah matematika yang tercantum pada RPP model POKM. Tes kemampuan pemecahan masalah dan tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah terdiri dari 6 nomor soal yang berbentuk *tes kinerja*. Setiap soal kemampuan pemecahan masalah mencakup 4 (empat) indikator kemampuan pemecahan masalah yakni: (1) memahami masalah, (2) merencanakan penyelesaian masalah, (3) menyelesaikan masalah, (4) memeriksa kembali jawaban, dan setiap soal keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah mencakup 4 (empat) indikator yakni: (1) memprediksi keadaan

soal, (2) merencanakan penyelesaian soal, (3) melaksanakan rencana penyelesaian soal (memantau), dan (4) mengevaluasi kembali hasil penyelesaian.

Sebelum tes ini digunakan terlebih dahulu dilakukan penilaian oleh beberapa pakar dan praktisi di bidang pendidikan. Tes tersebut dapat digunakan apabila hasil penilaian pakar dan praktisi diperoleh kesimpulan bahwa: (1) keseluruhan komponen tes kemampuan pemecahan masalah matematika dan tes keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah valid, (2) tes kemampuan pemecahan masalah matematika dan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas, (4) tes kemampuan pemecahan masalah matematika dan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah dapat digunakan dengan revisi kecil.

b. Lembar pengamatan aktivitas peserta didik

Lembar pengamatan aktivitas peserta didik disusun untuk memperoleh salah satu jenis data pendukung keefektifan model POKM. Instrumen ini mencakup tiga komponen, yaitu: petunjuk, delapan indikator aktivitas peserta didik, dan tabel untuk mencatat frekuensi aktivitas peserta didik setiap 3 menit. Delapan indikator aktivitas peserta didik yang mungkin yaitu: (1) siap mengikuti kegiatan pembelajaran, mencatat topik pelajaran, memahami manfaat pelajaran, memahami tujuan pembelajaran, mengingat kembali pelajaran sebelumnya, dan memahami prosedur pembelajaran, (2) memperhatikan penjelasan guru tentang komponen keterampilan metakognitif dan materi pelajaran, dan bertanya/mendiskusikan materi pelajaran dan langkah-langkah penerapan keterampilan metakognitif, serta melengkapi catatan,

(3) melakukan latihan menerapkan komponen keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, (4) mengerjakan tugas yang diberikan dengan tetap menerapkan keterampilan metakognitif, (5) meminta bimbingan guru jika ada hal-hal yang kurang dipahami dalam proses mengerjakan tugas latihan, dan memperhatikan umpan balik yang disampaikan oleh guru, (6) melakukan latihan secara mandiri dengan menyelesaikan soal sambil menerapkan keterampilan metakognitif, (7) melakukan kegiatan lain dalam tugas, misalnya menunjukkan gerakan seperti sedang berpikir, memperhatikan pekerjaan teman, (8) melakukan kegiatan lain di luar tugas, misalnya tidak memperhatikan penjelasan guru, atau melakukan aktivitas yang tidak berkaitan dengan kegiatan pembelajaran (ngantuk, tidur, ngobrol, melamun, dan sebagainya). Sebelum digunakan instrumen tersebut, terlebih dahulu dinilai oleh beberapa orang pakar dan praktisi. Instrumen tersebut dapat digunakan apabila hasil penilaian pakar dan praktisi diperoleh kesimpulan bahwa: (1) keseluruhan komponen lembar pengamatan aktivitas peserta didik dinilai valid, (2) lembar pengamatan aktivitas peserta didik reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas, (4) lembar pengamatan aktivitas peserta didik dapat digunakan dengan revisi kecil.

c. Angket respons peserta didik

1) Angket respons peserta didik tentang pembelajaran dengan model POKM

Angket respons peserta didik ini dibuat untuk memperoleh salah satu jenis data pendukung keefektifan model POKM. Angket tersebut berisi petunjuk dan aspek-aspek pembelajaran yang menjadi objek respons peserta didik, yang

terdiri atas tujuh komponen yaitu: (1) pendapat peserta didik terhadap komponen kegiatan belajar mengajar, (2) kesulitan yang dialami peserta didik mempelajari materi pelajaran dan mengerjakan LKPD, (3) kesulitan yang dialami peserta didik menerapkan strategi belajar dalam memahami materi (memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi), (4) kemajuan yang dirasakan peserta didik (misalnya lebih termotivasi dan mudah untuk belajar, hasil belajar lebih baik dan sebagainya) setelah belajar dengan cara seperti yang dialami, (5) yang lebih menarik dan bermanfaat bagi peserta didik, kegiatan belajar mengajar dengan menggunakan model POKM atau kegiatan belajar mengajar seperti yang dilaksanakan sebelumnya, (6) pendapat peserta didik tentang penggunaan model POKM pada pembelajaran selanjutnya, (7) komentar peserta didik terhadap buku peserta didik, (8) pendapat peserta didik terhadap lembar kegiatan peserta didik (LKPD). Dari delapan komponen tersebar dalam 16 indikator. Setiap item memiliki dua alternatif jawaban dengan skor yang berbeda-beda, dengan perincian 1 untuk jawaban “Ya” dan 0 untuk jawaban “Tidak”.

Sebelum angket tersebut digunakan terlebih dahulu dinilai oleh beberapa pakar dan praktisi dibidang pendidikan. Angket tersebut dapat digunakan apabila hasil penilaian pakar dan praktisi diperoleh kesimpulan bahwa: (1) seluruh komponen angket respons peserta didik tentang penerapan model POKM dinilai valid, (2) angket respons peserta didik tentang penerapan model POKM reliabel, (3) memenuhi kevalidan dan reliabilitas, (4) angket respons peserta didik tentang penerapan model POKM dapat digunakan dengan revisi kecil.

2) Angket respons peserta didik tentang buku peserta didik

Angket respons peserta didik ini dibuat untuk memperoleh salah satu jenis data pendukung keefektifan model POKM. Angket tersebut berbentuk skala Guttman yang berisi petunjuk dan aspek-aspek konstruksi buku peserta didik yang meliputi: (1) bahasa, (2) istilah, (3) urutan materi, (4) kepraktisan, dan (5) kemenarikan, dan tercakup dalam lima item. Setiap item memiliki pat alternatif jawaban dengan skor yang berbeda-beda, dengan perincian 1 jawaban “Ya” dan 0 untuk jawaban “Tidak”. Setiap item Angket ini tidak divalidasi karena menggunakan instrumen valid yang dikembangkan oleh Ilham (2004) dan Nurdin (2007).

3) Angket respons peserta didik tentang LKPD

Angket respons peserta didik ini dibuat untuk memperoleh salah satu jenis data pendukung keefektifan model POKM. Angket tersebut berisi petunjuk dan aspek-aspek konstruksi LKPD yang meliputi: (1) bahasa, (2) kemenarikan, (3) manfaatnya untuk motivasi, (4) keterbacaan gambar/garfik, (5) kesesuaian dengan materi, dan (6) rasionalitas alokasi waktu, dan tercakup dalam enam item. Instrumen ini tidak divalidasi karena menggunakan instrumen valid yang dikembangkan oleh Ilham (2004) dan Nurdin (2007).

BAB V

ANALISIS DATA DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Data hasil validasi dianalisis untuk menjawab apakah model pembelajaran dan perangkat pembelajaran valid atau tidak, dan apakah secara teoretis model dan perangkat pembelajaran yang sedang dikembangkan dapat dilaksanakan di kelas atau tidak. Hasil validasi terhadap model pembelajaran dapat secara langsung memvalidasi perangkat pembelajaran. Hal itu dikarenakan model pembelajaran dan perangkat pembelajaran dikembangkan bersama-sama. Sedangkan data hasil uji coba di kelas digunakan untuk menjawab apakah model POKM dan perangkat yang sedang dikembangkan praktis atau tidak, menarik atau tidak, dan apakah efektif atau tidak untuk mengoptimalkan keterampilan metakognitif dan meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik.

Analisis data tentang kevalidan, kepraktisan, kemenarikan dan keefektifan masing-masing dikemukakan sebagai berikut:

Analisis data kevalidan model POKM

Kegiatan yang dilakukan dalam proses analisis data kevalidan model POKM mengacu pada Borich (Nurdin, 2016) sebagai berikut.

- a. Melakukan rekapitulasi terhadap semua pernyataan validator ke dalam tabel yang meliputi: a) aspek (A_i), b) kriteria (K_i), c) hasil penilaian validator (V_{ji})
- b. Mencari rerata hasil validasi dari semua validator untuk setiap kriteria dengan rumus:

$$\overline{K}_i = \frac{\sum_{j=1}^n V_{ij}}{n}, \text{ dengan:}$$

$\overline{K}_i$ = rerata kriteria ke i

V_{ij} = skor hasil penilaian terhadap kriteria ke- i oleh validator ke- j

n = banyaknya validator

- c. Mencari rerata tiap aspek dengan rumus:

$$\overline{A}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \overline{K}_{ij}}{n}, \text{ dengan:}$$

$\overline{A}_i$ = rerata aspek ke i ,

$\overline{K}_{ij}$ = rerata untuk aspek ke i kriteria ke j ,

n = banyaknya kriteria dalam aspek ke i .

d. Mencari rerata total ($\bar{X}$) dengan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{A}_i}{n}, \text{ dengan:}$$

$\bar{X}$ = rerata total,

$\bar{A}_i$ = rerata aspek ke i ,

n = banyaknya aspek.

e. Menentukan kategori validitas setiap kriteria atau setiap aspek atau keseluruhan aspek dengan mencocokkan rerata kriteria ($\bar{K}_i$) atau rerata aspek ($\bar{A}_i$) atau rerata total ($\bar{X}$) dengan kategori validitas yang ditetapkan.

f. Kategori validitas setiap kriteria, setiap aspek, atau keseluruhan aspek ditetapkan seperti pada Tabel 5.1. berikut.

Tabel 5.1. Kategori Kevalidan

Rerata Skor ($\bar{X}$)	Kategori
$3,5 \leq \bar{X} \leq 4$	Sangat Valid
$2,5 \leq \bar{X} < 3,5$	Valid
$1,5 \leq \bar{X} < 2,5$	Cukup Valid
$\bar{X} < 1,5$	Tidak Valid

Keterangan:

$M = \bar{K}_i$ untuk mencari validitas setiap kriteria,

$M = \bar{A}_i$ untuk mencari validitas setiap aspek,

$M = \bar{X}$ untuk mencari validitas keseluruhan aspek.

Untuk memutuskan bahwa model POKM memiliki derajat validitas yang memadai digunakan kriteria (i) nilai $\bar{X}$ untuk

keseluruhan aspek minimal berada dalam kategori “**cukup valid**”, dan (ii) nilai $\bar{A}_i$ untuk setiap aspek minimal berada dalam kategori “**valid**”. Apabila tidak demikian, maka perlu dilakukan revisi berdasarkan saran para validator atau dengan melihat kembali aspek-aspek yang nilainya kurang. Selanjutnya dilakukan validasi ulang lalu dianalisis kembali. Demikian seterusnya sampai memenuhi nilai M minimal berada di dalam kategori valid.

Selanjutnya dihitung reliabilitas lembar penilaian model POKM menggunakan hasil modifikasi rumus *percentage of agreements* dari Emmer & Millett dan Borich (Nurdin, 2016) sebagai berikut.

$$\text{Percentage of Agreements} = \left[1 - \frac{A - B}{A + B} \right] \times 100\%$$

Keterangan:

A = The larger frequency counts of observer,

B = The smaller frequency counts of observer.

Rumus *Percentage of Agreements* di atas dimodifikasi Nurdin (2016) menjadi rumus reliabilitas:

$$R = \left[1 - \frac{A - B}{A + B} \right] \times 100\%$$

Keterangan:

R = Koefisien reliabilitas,

A = Penilaian maksimum dari validator,

B = Penilaian minimum dari validator.

Lembar penilaian Model-POKM dikatakan reliabel jika nilai reliabilitasnya

$$(R) \geq 0,75 \text{ Borich (Nurdin, 2016)}$$

Analisis data kepraktisan model POKM

Data kepraktisan model POKM diperoleh dari (a) hasil pengamatan keterlaksanaan model POKM secara umum dari dua observer dan (b) hasil angket respons guru tentang penerapan model POKM.

a. Aktivitas yang dilakukan dalam proses analisis data keterlaksanaan model POKM adalah sebagai berikut.

- (1) Melakukan rekapitulasi hasil pengamatan keterlaksanaan model POKM ke dalam tabel yang meliputi: 1) aspek (A_i), 2) kriteria (K_i).
- (2) Mencari rerata setiap aspek pengamatan setiap pertemuan dengan rumus:

$$\bar{A}_{mi} = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{K}_{ij}}{n}, \text{ dengan:}$$

A_{mi} = rerata aspek ke i pertemuan ke m ,

$\bar{K}_{ij}$ = hasil pengamatan untuk aspek ke i kriteria ke j ,

n = banyaknya kriteria dalam aspek ke i .

- (3) Mencari rerata setiap aspek pengamatan untuk n kali pertemuan dengan rumus:

$$\bar{A}_i = \frac{\sum_{m=1}^n \bar{A}_{mi}}{n}, \text{ dengan:}$$

$\bar{A}_i$ = rerata aspek ke i

$\bar{A}_{mi}$ = rerata aspek ke i pertemuan ke m

- (4) Mencari rerata total berupa rerata semua aspek ($\bar{X}$) dengan rumus

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{A}_i}{n}, \text{ dengan:}$$

$\bar{X}$ = rerata semua aspek,

$\bar{A}_i$ = rerata aspek ke i ,

n = banyaknya aspek.

- (5) Menentukan kategori keterlaksanaan setiap aspek atau keseluruhan aspek model POKM dengan mencocokkan rerata setiap aspek ($\bar{A}_i$) atau rerata total aspek ($\bar{X}$) dengan kategori yang ditetapkan.
- (6) Kategori keterlaksanaan setiap aspek atau keseluruhan aspek model POKM ditetapkan seperti pada Tabel 5.2. berikut.

Tabel 5.2. Kategori Keterlaksanaan Model POKM

Rerata Skor M	Kategori
$1,5 \leq M \leq 2,0$	Terlaksana Seluruhnya
$0,5 \leq M < 1,5$	Terlaksana Sebagian
$0,0 \leq M < 0,5$	Tidak Terlaksana

Keterangan:

$M = \overline{A_i}$ untuk mencari validitas setiap aspek,

$M = \overline{X}$ untuk mencari validitas keseluruhan aspek.

Kriteria yang digunakan untuk memutuskan bahwa model POKM memiliki derajat keterlaksanaan (T) yang memadai adalah nilai $\overline{A_i}$ dan $\overline{X}$ minimal berada dalam kategori “terlaksana sebagian”, berarti model tidak direvisi. Apabila nilai T berada di dalam kategori lainnya, maka perlu dilakukan revisi dengan melihat kembali aspek-aspek yang nilainya kurang. Selanjutnya dilakukan kembali pengamatan terhadap pembelajaran model POKM hasil revisi, lalu dianalisis kembali. Demikian seterusnya sampai memenuhi nilai T minimal berada dalam kategori sebagian besar yang terlaksana.

Selanjutnya dihitung reliabilitas lembar pengamatan keterlaksanaan model POKM dengan menggunakan rumus *percentage of agreements* (Grinnell dalam Nurdin, 2016) sebagai berikut:

Percentage of Agreement (R) =

$$\frac{Agreements(A)}{Disagreements(D) + Agreements(A)} \times 100 \%$$

Keterangan:

A adalah besarnya frekuensi kecocokan antara data dua pengamat,

D adalah besarnya frekuensi yang tidak cocok antara data dua pengamat,

R adalah koefisien (derajat) reliabilitas instrumen.

Kriteria keterlaksanaan model pembelajaran dikatakan reliabel jika nilai reliabilitasnya (R) $\geq 0,75$ (Borich dalam Nurdin, 2016).

b. Aktivitas yang dilakukan dalam proses analisis data respons guru tentang penerapan model POKM adalah sebagai berikut.

Kegiatan yang dilakukan untuk menganalisis data respons guru tentang penerapan model POKM melalui langkah-langkah sebagai berikut.

- 1) Menghitung persentase respons positif dari guru sesuai dengan aspek yang ditanyakan.
- 2) Menentukan kategori untuk respons positif guru dengan cara mencocokkan hasil persentase dengan kriteria yang ditetapkan.
- 3) Jika hasil analisis menunjukkan bahwa respons guru belum positif, maka dilakukan revisi terhadap perangkat yang tengah dikembangkan terkait dengan aspek-aspek yang nilainya kurang.

Kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa guru memiliki respons positif terhadap pembelajaran model POKM, apabila guru memberi respons positif minimal 70% jumlah aspek yang ditanyakan. Respons positif guru terhadap penerapan model POKM dikatakan tercapai apabila kriteria respons positif guru terpenuhi.

Selanjutnya kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa model POKM bersifat praktis, jika standar keterlaksanaan model POKM dan respons guru tentang penerapan model POKM terpenuhi.

Analisis data kemenarikan model POKM

Kegiatan yang dilakukan untuk menganalisis data kemenarikan, yakni melalui langkah-langkah sebagai berikut.

- 1) Menghitung banyak peserta didik yang menyatakan tertarik sesuai dengan aspek yang ditanyakan.
- 2) Menghitung persentase dari (1).
- 3) Menentukan kategori untuk ketertarikan peserta didik dengan cara mencocokkan hasil persentase dengan kriteria yang ditetapkan.
- 4) Jika hasil analisis menunjukkan bahwa ketertarikan peserta didik terhadap model yang dikembangkan belum memenuhi kriteria minimal, maka dilakukan revisi terhadap perangkat yang tengah dikembangkan atau memberikan arahan kepada guru terkait dengan aspek-aspek yang nilainya kurang.

Kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa para peserta didik memiliki ketertarikan terhadap pembelajaran model POKM adalah lebih dari 50% dari mereka yang menyatakan tertarik terhadap minimal 70% jumlah aspek yang ditanyakan.

Analisis data keefektifan model POKM

Data keefektifan model POKM yang akan dianalisis terdiri dari 4 komponen keefektifan, yaitu (1) hasil belajar peserta didik, (2) aktivitas peserta didik, (3) respons peserta didik terhadap pembelajaran model POKM. Sehingga, kegiatan analisis data terhadap ketiga komponen itu adalah sebagai berikut.

a. Analisis hasil belajar peserta didik

1) Analisis kemampuan pemecahan masalah peserta didik

Analisis dilakukan terhadap skor-skor yang diperoleh peserta didik dari tes kemampuan pemecahan masalah matematika yang diberikan di akhir pembelajaran dengan menggunakan rubrik seperti pada Tabel 5.3 berikut.

Tabel 5.3. Rubrik Penyelesaian Hasil Tes Kinerja Pemecahan Masalah Matematika

ASPEK YANG DINILAI	REAKSI TERHADAP SOAL/MASALAH	SKOR
Memahami Masalah	• Tidak memahami soal/tidak ada jawaban	0
	• Tidak memperhatikan syarat-syarat soal/cara interpretasi soal kurang tepat	1
	• Memahami soal dengan baik	2
Merencanakan Penyelesaian	• Tidak ada rencana strategi penyelesaian	0
	• Ada Strategi yang direncanakan kurang tepat	1
	• Menggunakan satu strategi tertentu tetapi mengarah pada jawaban yang salah	2
	• Menggunakan satu strategi tertentu tetapi tidak dapat dilanjutkan	3

	• Menggunakan beberapa strategi yang benar dan mengarah pada jawaban yang benar.	4
Menyelesaikan Masalah	• Tidak ada penyelesaian	0
	• Ada penyelesaian, tetapi prosedur tidak benar jelas	1
	• Menggunakan satu prosedur tertentu dan mengarah pada jawaban yang benar.	2
	• Menggunakan satu prosedur tertentu yang benar tetapi salah dalam menghitung	3
	• Menggunakan prosedur tertentu yang benar dan hasil benar.	4
Memeriksa Kembali	• Tidak ada pemeriksaan jawaban	0
	• Pemeriksaan hanya pada jawaban (perhitungan)	1
	• Pemeriksanaan hanya pada proses	2
	• Pemeriksaan pada proses dan jawaban	3

(Zakaria Efendi, 2007)

Adapun langkah-langkah kegiatan analisis data kemampuan pemecahan masalah adalah sebagai berikut.

- 1) Menentukan skor untuk masing-masing soal tes dengan menggunakan rubrik yang sudah disiapkan.
- 2) Mencari rerata skor dengan menggunakan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}, \text{ dengan:}$$

$\bar{X}$ = rerata skor,

S_i = skor soal ke i ,

n = banyaknya soal.

- 3) Menentukan kategori kemampuan pemecahan masalah matematika dengan mencocokkan rerata skor ($\bar{X}$) dengan kategori yang ditetapkan.
- 4) Kategori kemampuan pemecahan masalah ditetapkan seperti pada Tabel 5.4 berikut:

Tabel 5.4. Kategori Kemampuan Pemecahan Masalah Peserta Didik

Rerata Skor ($\bar{X}$)	Kategori
$3,5 \leq \bar{X} \leq 4$	Sangat Tinggi
$2,5 \leq \bar{X} < 3,5$	Tinggi
$1,5 \leq \bar{X} < 2,5$	Sedang
$0,5 \leq \bar{X} < 1,5$	Rendah
$\bar{X} < 0,5$	Sangat Rendah

(Zakaria Efendi, 2007)

Standar pencapaian hasil belajar dalam aspek kemampuan pemecahan masalah dikatakan terpenuhi apabila kemampuan peserta didik dalam aspek tersebut dalam kategori minimal “sedang”. Kemampuan pemecahan masalah matematika dikatakan meningkat apabila terdapat perbedaan skor kemampuan pemecahan masalah matematika sebelum uji coba model POKM (pre-test) dengan skor kemampuan pemecahan

masalah matematika setelah uji coba model POKM (pos-test) secara signifikan. Perbedaan skor kemampuan pemecahan masalah matematika tersebut dapat dihitung dengan menggunakan metode *Pre-Experimental Designs*, dengan bentuk desain One-Group Pretest-Posttest Design.

O_1	X	O_2
-------	---	-------

O_1 : Nilai pretest sebelum uji coba model POKM

O_2 : Nilai posttest setelah uji coba model POKM

Perbedaan skor kemampuan pemecahan masalah matematika sebelum uji coba model POKM (pre-test) dengan skor kemampuan pemecahan masalah matematika setelah uji coba model POKM (pos-test) = $(O_2 - O_1)$

Analisis statistik yang digunakan adalah analisis statistik inferensial uji-t (t-test) dengan rumus.

$$t = \frac{\bar{B}}{S_B / \sqrt{n}}$$

Keterangan : (Tiro, 2008: 249)

$\bar{B}$: Rata-rata selisih pretest dan posttest

S_B : Standar deviasi

n : Jumlah sampel

Kriteria yang digunakan untuk memutuskan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan antara skor kemampuan pemecahan masalah matematika sebelum uji coba model POKM (pre-test) dengan skor kemampuan pemecahan matematika

setelah uji coba model POKM (pos-test), adalah jika $p < \alpha$ atau $t_{hitung} \leq t_{(1-\alpha)} \text{ tabel}$ maka “tidak terdapat perbedaan yang signifikan antara skor kemampuan pemecahan masalah matematika sebelum uji coba model POKM (pre-test) dengan skor kemampuan pemecahan matematika setelah uji coba model POKM (pos-test), dan sebaliknya, jika $t_{hitung} > t_{(1-\alpha)} \text{ tabel}$ maka “terdapat perbedaan yang signifikan antara skor kemampuan pemecahan sebelum uji coba model POKM (pre-test) dengan skor kemampuan pemecahan masalah matematika setelah uji coba model POKM (pos-test).

2) Analisis ketuntasan belajar

Analisis dilakukan terhadap skor yang diperoleh peserta didik dari Tes Hasil Belajar (THB) yang diberikan setelah semua materi tuntas dibahas. Analisis hasil belajar peserta didik diarahkan pada pencapaian ketuntasan individu dan ketuntasan klasikal. Jika seorang peserta didik memperoleh skor ≥ 75 maka peserta didik yang bersangkutan mencapai ketuntasan individu. Jika minimal 75% peserta didik mencapai skor minimal 75, maka ketuntasan klasikal telah tercapai.

3) Analisis kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah matematika

Analisis dilakukan terhadap skor-skor yang diperoleh peserta didik dari tes kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah matematika yang diberikan di akhir pembelajaran. Karena tes ini berbentuk tes kinerja, maka penskoran dilakukan dengan menggunakan rubrik kinerja dengan kriteria seperti pada Tabel 5.5 berikut.

Tabel 5.5. Rubrik Penyelesaian Hasil Tes Kinerja Penerapan Keterampilan Metakognitif

Aspek Yang Dinilai	Reaksi Terhadap Soal/Masalah	Skor
Memprediksi	• tidak ada komponen keterampilan memprediksi yang jelas.	0
	• ada komponen keterampilan memprediksi, tetapi tidak sesuai untuk memecahkan masalah.	1
	• ada komponen keterampilan memprediksi yang tepat dan sistematis untuk memecahkan masalah.	2
Merencanakan	• tidak ada komponen keterampilan merencanakan yang jelas.	0
	• ada komponen keterampilan merencanakan tetapi tidak sesuai untuk memecahkan masalah.	1
	• ada komponen keterampilan merencanakan yang sesuai, tetapi proses tersebut belum jelas, untuk memecahkan masalah.	2
	• ada komponen keterampilan merencanakan yang sesuai, belum sistematis untuk memecahkan masalah.	3
	• ada komponen keterampilan merencanakan yang tepat dan sistematis untuk memecahkan masalah.	4

Memonitoring	• tidak ada komponen keterampilan memonitoring yang jelas.	0
	• ada komponen keterampilan memonitoring tetapi tidak sesuai untuk memecahkan masalah.	1
	• ada komponen keterampilan memonitoring yang sesuai, tetapi proses tersebut belum jelas, untuk memecahkan masalah.	2
	• ada komponen keterampilan memonitoring yang sesuai untuk memecahkan masalah.	3
	• ada komponen keterampilan memonitoring yang tepat dan sistematis untuk memecahkan masalah.	4
Mengevaluasi	• tidak ada komponen keterampilan mengevaluasi yang jelas.	0
	• ada komponen keterampilan mengevaluasi tetapi tidak sesuai untuk memecahkan masalah.	1
	• ada komponen keterampilan mengevaluasi yang sesuai, tetapi proses tersebut belum jelas, untuk memecahkan masalah.	2
	• ada komponen keterampilan mengevaluasi yang sesuai untuk memecahkan masalah.	3

Adapun langkah-langkah kegiatan analisis data keterampilan metakognitif peserta didik dalam menyelesaikan masalah adalah sebagai berikut.

- 1) Menentukan skor untuk masing-masing soal tes dengan menggunakan rubrik yang sudah disiapkan.
- 2) Mencari rerata skor dengan menggunakan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}, \text{ dengan:}$$

$\bar{X}$ = rerata skor,

S_i = skor soal ke i ,

n = banyaknya soal.

- 3) Menentukan kategori kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah matematika dengan mencocokkan rerata skor ($\bar{X}$) dengan kategori yang ditetapkan.
- 4) Kategori kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah ditetapkan seperti pada Tabel 3.6 berikut.

Tabel. 3.6. Kategori Kemampuan Keterampilan Metakognitif

Rerata Skor ($\bar{X}$)	Kategori
$3,5 \leq \bar{X} \leq 4$	Sangat Tinggi
$2,5 \leq \bar{X} < 3,5$	Tinggi
$1,5 \leq \bar{X} < 2,5$	Sedang
$0,5 \leq \bar{X} < 1,5$	Rendah
$\bar{X} < 0,5$	Sangat Rendah

Zakaria Efendi (2007)

Standar pencapaian hasil belajar dalam aspek kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah dikatakan terpenuhi apabila kemampuan peserta didik dalam aspek tersebut dalam kategori minimal “sedang”.

Sedangkan pencapaian hasil belajar secara umum dikatakan terpenuhi jika ketiga aspek tersebut (kemampuan pemecahan masalah, standar kemampuan mengoptimalkan keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan masalah matematika, ketuntasan belajar) sudah tercapai.

b. Analisis data aktivitas peserta didik

Data hasil observasi aktivitas peserta didik selama kegiatan pembelajaran berlangsung dianalisis dan dideskripsikan. Untuk mencari rata-rata frekuensi dan rata-rata persentase waktu yang digunakan peserta didik melakukan aktivitas selama kegiatan pembelajaran ditentukan melalui langkah-langkah menurut Nurdin (2016) sebagai berikut.

- 1) Hasil pengamatan aktivitas peserta didik untuk setiap indikator dalam satu kali pertemuan ditentukan frekuensinya dan dicari rata-rata frekuensi dari dua orang pengamat. Selanjutnya ditentukan frekuensi rata-rata dari rata-rata frekuensi untuk beberapa kali pertemuan.
- 2) Mencari persentase frekuensi setiap indikator dengan cara membagi besarnya frekuensi dengan jumlah frekuensi untuk semua indikator. Kemudian hasil pembagian dikalikan dengan 100%. Selanjutnya dicari rata-rata persentase waktu untuk beberapa kali pertemuan dan dimasukkan dalam tabel rata-rata persentase.

Selanjutnya persentase waktu untuk setiap indikator dirujuk terhadap kriteria pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik dan guru sebagai berikut.

- a) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk mengikuti kegiatan pembelajaran meliputi: mencatat topik pelajaran, memahami manfaat pelajaran, memahami tujuan pembelajaran, mengingat kembali pelajaran sebelumnya, dan memahami prosedur pembelajaran adalah 10 menit atau 11% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal (PWI) aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 6% sampai dengan 16%.
- b) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk memperhatikan penjelasan guru tentang komponen keterampilan metakognitif dan materi pelajaran, dan bertanya/mendiskusikan materi pelajaran dan langkah-langkah penerapan keterampilan metakognitif, serta melengkapi catatan adalah 20 menit atau 22 % dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 17% sampai dengan 27%.
- c) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk melakukan latihan menerapkan komponen keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah adalah 20 menit atau 22% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 17% sampai dengan 27% .
- d) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk mengerjakan tugas yang diberikan dengan tetap menerapkan Keterampilan

Metakognitif adalah 10 menit atau 11% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan. Sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator ini ditetapkan dari 6% sampai dengan 16% .

- e) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk meminta bimbingan guru jika ada hal-hal yang kurang dipahami dalam proses mengerjakan tugas latihan, dan memperhatikan umpan balik yang disampaikan oleh guru adalah 15 menit atau 17% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 12% sampai dengan 22% .
- f) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk melakukan latihan secara mandiri dengan menyelesaikan soal sambil menerapkan keterampilan metakognitif adalah 10 menit atau 11% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 6% sampai dengan 16%.
- g) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk melakukan kegiatan lain dalam tugas, misalnya menunjukkan gerakan seperti sedang berpikir, memperhatikan pekerjaan teman adalah 0 menit atau 0% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 0% sampai dengan 5%.
- h) Waktu ideal yang digunakan peserta didik untuk melakukan kegiatan lain di luar tugas, misalnya tidak memperhatikan penjelasan guru, atau melakukan aktivitas yang tidak berkaitan dengan kegiatan pembelajaran (ngantuk, tidur, ngobrol,

melamun, dan sebagainya) adalah 0 menit atau 0% dari waktu yang tersedia pada setiap pertemuan, sehingga batas toleransi pencapaian waktu ideal aktivitas peserta didik untuk indikator tersebut ditetapkan dari 0% sampai dengan 5%.

- i) Aktivitas peserta didik dikatakan ideal, apabila enam dari delapan kriteria batas toleransi pencapaian waktu ideal yang digunakan dipenuhi. Dengan catatan kriteria batas toleransi 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 harus dipenuhi. Hal ini berdasarkan pertimbangan: kegiatan 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 merupakan kegiatan inti dalam pembelajaran dibandingkan dengan kegiatan lainnya.

Tabel 5.7. Kriteria Pencapaian Waktu Ideal Aktivitas Peserta Didik

No.	Kategori Aktivitas Peserta Didik	Waktu Ideal	Interval Toleransi PWI (%)	Kriteria
1.	Siap mengikuti kegiatan pembelajaran, mencatat topik pelajaran, memahami manfaat pelajaran, memahami tujuan pembelajaran, mengingat kembali pelajaran sebelumnya, dan memahami prosedur pembelajaran.	11 % dari WT	6 – 16	
2.	Memperhatikan penjelasan guru tentang komponen keterampilan metakognitif dan materi pelajaran, dan bertanya/mendiskusikan materi pelajaran dan langkah-langkah penerapan	22 % dari WT	17 – 27	Lima dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 dipenuhi dan

	keterampilan metakognitif, serta melengkapi catatan.			1, 2, 3, 4, 5 dan 6 harus dipenuhi
3.	Melakukan latihan menerapkan komponen keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah.	22% dari WT	17-27	
4.	Mengerjakan tugas yang diberikan dengan tetap menerapkan Keterampilan Metakognitif.	11% dari WT	6-16	
5.	Meminta bimbingan guru jika ada hal-hal yang kurang dipahami dalam proses mengerjakan tugas latihan, dan memperhatikan umpan balik yang disampaikan oleh guru.	17 % dari WT	12 – 22	
6.	Melakukan latihan secara mandiri dengan menyelesaikan soal sambil menerapkan keterampilan metakognitif.	11 % dari WT	6 - 16	
7.	Melakukan kegiatan lain dalam tugas, misalnya menunjukkan gerakan seperti sedang berpikir, memperhatikan pekerjaan teman.	0 % dari WT	0 - 5	
8.	Melakukan kegiatan lain di luar tugas, misalnya tidak memperhatikan penjelasan guru, atau melakukan aktivitas yang tidak berkaitan dengan kegiatan pembelajaran (ngantuk, tidur, ngobrol, melamun, dan sebagainya).	0 % dari WT	0 – 5	

(Modifikasi dari model PMKM oleh Nurdin, 2016)

Keterangan:

PWI adalah persentase waktu indikator,

WT adalah waktu tersedia pada setiap pertemuan.

c. Analisis data respons peserta didik terhadap penerapan model POKM

Data berupa respons peserta didik terhadap penerapan model POKM terdiri dari tiga bagian, yakni: (1) respons peserta didik terhadap pembelajaran, (2) respons peserta didik terhadap buku bahan ajar, (3) respons peserta didik terhadap LKPD.

Kegiatan yang dilakukan untuk menganalisis data respons peserta didik dalam tiga bagian tersebut relatif sama, yakni melalui langkah-langkah sebagai berikut.

- 1) Menghitung banyak peserta didik yang memberi respons positif sesuai dengan aspek yang ditanyakan.
- 2) Menghitung persentase dari (1).
- 3) Menentukan kategori untuk respons positif peserta didik dengan cara mencocokkan hasil persentase dengan kriteria yang ditetapkan.
- 4) Jika hasil analisis menunjukkan bahwa respons peserta didik belum positif, maka dilakukan revisi terhadap perangkat yang tengah dikembangkan atau memberikan arahan kepada guru terkait dengan aspek-aspek yang nilainya kurang.

Kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa para peserta didik memiliki respons positif terhadap pembelajaran model POKM, buku bahan ajar, dan LKPD adalah lebih dari 50% dari mereka memberi respons positif terhadap minimal 70% jumlah aspek yang ditanyakan.

Respons positif peserta didik terhadap penerapan model POKM dikatakan tercapai apabila kriteria respons positif peserta didik untuk ketiga aspek (pembelajaran, buku bahan ajar dan LKPD) terpenuhi.

Selanjutnya kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa model POKM bersifat efektif standar keefektifan model, yakni (1) standar hasil belajar, (2) standar aktivitas peserta didik, dan (3) standar respons peserta didik dipenuhi

BAB VI

PERANGKAT RISET PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-1

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 1. Persamaan Lingkaran
Sub Materi	:1.1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di $(0,0)$ & Jari-jari r . 1.2. Kedudukan Suatu Titik terhadap $(0,0)$ & Jari-jari r .
Pertemuan	: ke - 1 (I)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- *Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.*
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. *Memprediksi* prasyarat menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tersebut.
2. *Merencanakan* rumus untuk menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tersebut.
3. *Memantau* proses menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tersebut.
4. *Mengevaluasi* hasil proses menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tersebut.

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-1, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Buku Berpetak/Kertas Grafik, Mistar, Jangka

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan membagikan perangkat pembelajaran yang berupa Buku Peserta Didik, LKPD-1, dan Brosur Keterampilan Metakognitif.
2. Menyampaikan prosedur pembelajaran dengan model POKM.
3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan menyampaikan kegunaan lingkaran dalam kehidupan nyata.
5. Melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi prasyarat, yaitu bagian-bagian lingkaran, khususnya diameter dan jari-jari lingkaran.

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memecahkan masalah dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi pelajaran (**Fase II: 10 menit**)
2. Mempresentasikan materi persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r sambil meminta peserta didik untuk menerapkan beberapa komponen ketrampilan metakognitif misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi melalui contoh soal 1, 2, dan 3 pada Buku Peserta Didik halaman 4, 5 dan 6 (**Fase II: 15 menit**)
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) (**Fase III: 15 menit**).
4. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-1 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik

menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi (**Fase IV : 15 menit**)

5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik. (**Fase IV: 10 menit**)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik di akhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 1 pada Buku Peserta Didik halaman 7. (**Fase V**)

VIII. Penilaian

- | | |
|---------------------|----------------|
| 1. Teknik Penilaian | : Tes tertulis |
| 2. Bentuk Instrumen | : Uraian |
| 3. Instrumen | : |

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan panjang jari-jari 15;

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-2

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 1. Persamaan Lingkaran
Sub Materi	: 1.3. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di (a,b) dan Jari-jari r . 1.4. Kedudukan Suatu Titik terhadap Lingkaran yang Berpusat di (a,b) dan Jari-jari r .
Pertemuan	: ke - 2 (II)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- *Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.*
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. Memprediksi prasyarat menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r dan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r .
2. Merencanakan rumus menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r dan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r .

3. Memantau proses penggunaan rumus menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r dan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r .
4. Mengevaluasi hasil proses menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r dan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dengan jari-jari r .

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah.

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-2, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka.

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-2, dan Brosur Strategi Metakognitif).
2. Mengingatkan kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.

3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan menyampaikan kegunaan lingkaran dalam kehidupan nyata.
5. Melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi: (a) persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r dan (b) kedudukan suatu titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r .

B. Kegiatan Inti (Fase II – IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau dan mengevaluasi pelajaran. **(Fase II: 10 menit)**
2. Mempresentasikan materi persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r , sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen-komponen keterampilan metakognitif, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau dan mengevaluasi melalui contoh soal 4, 5, 6, 7 pada Buku Peserta didik halaman 8, 9, 10 **(Fase III: 15 menit)**
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) **(Fase III: 15 menit)**.
4. Meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-2 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan ketrampilan metakognitif dalam memecahkan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau dan mengevaluasi. **(Fase IV: 15 menit)**

5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif dalam memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik. (**Fase IV: 10 menit**)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta Didik halaman 11 (Fase V).

VII. Penilaian

1. Teknik : Tes tertulis
 2. Bentuk Instrumen : Uraian
 3. Instrumen :
- a. Tentukan persamaan lingkaran berpusat di $A(3,4)$ dan panjang jari-jari 10;
 - b. Tentukan persamaan lingkaran dengan diameter ruas garis AB jika diketahui titik $A(3,5)$ dan titik $B(-9,7)$!

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-3

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 1. Persamaan Lingkaran
Sub Materi	: 1. 5. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran
Pertemuan	: ke - 3 (III)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- *Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.*
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. *Memprediksi* prasyarat menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui dan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.
2. *Merencanakan* rumus menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui dan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.
3. *Memantau* proses penggunaan rumus menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui dan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.

4. *Mengevaluasi* hasil proses menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui dan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-3, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-3, dan Brosur Strategi Metakognitif).
2. Mengingat kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.
3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan menyampaikan kegunaan lingkaran dalam kehidupan nyata.

5. Melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi *bentuk umum persamaan lingkaran*.

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi pelajaran.
(Fase II: 10 menit)
2. Mempresentasikan materi *bentuk umum persamaan lingkaran*, sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen keterampilan metakognitif, misalnya memprediksi dan merencanakan melalui contoh soal 8, 9, 10, 11, 12 pada Buku Peserta Didik halaman 12, 13, 14 (Fase II: 15 menit)
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah)
(Fase III: 15 menit).
4. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-3 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi. (Fase IV: 15 menit)
5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif peserta didik memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik (Fase IV: 10 menit)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta didik halaman 15 (Fase V).

VII. Penilaian

1. Teknik : Tes tertulis
2. Bentuk Instrumen : Uraian
3. Instrumen :

Tentukan titik pusat dan panjang jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$!

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-4

Satuan Pendidikan : SMA
Kelas/Semester : XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran : Matematika
Materi Pokok : 1. Persamaan Lingkaran
Sub Materi : 1. 6. Posisi Garis terhadap Suatu Lingkaran
Pertemuan : ke - 4 (IV)
Alokasi Waktu : 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. Memprediksi prasyarat menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan rumus jarak dan menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan diskriminan.
2. Merencanakan cara menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan rumus jarak dan menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan diskriminan

3. *Memantau* proses menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan rumus jarak dan menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan diskriminan
4. *Mengevaluasi* hasil proses menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan rumus jarak dan menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan diskriminan

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah.

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-4, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka.

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fae I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-4, dan Brosur Strategi Metakognitif).
2. Mengingat kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.

3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi *posisi garis terhadap lingkaran*.

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi materi pelajaran **(Fase II: 10 menit)**
2. Guru mempresentasikan (a) materi posisi suatu garis terhadap lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dengan menggunakan *konsep jarak*, (b) posisi suatu garis terhadap lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dengan menggunakan *konsep diskriminan*, sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen-komponen keterampilan metakognitif, misalnya merencanakan, memantau, dan mengevaluasi melalui contoh soal 13, 14 pelajaran dari materi pada Buku Peserta Didik halaman 17, 18 **(Fase II: 15 menit)**
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) **(Fase III: 15 menit)**.
4. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-3 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi. **(Fase IV: 15 menit)**

5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif peserta didik memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik (**Fase IV: 10 menit**)

C. Penutup (FaseV: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta didik halaman 19 (Fase V).

VII. Penilaian

- | | |
|---------------------|----------------|
| 1. Teknik | : Tes |
| 2. Bentuk Instrumen | : Tes tertulis |
| 3. Instrumen | : |

Tentukan kedudukan titik $(3,5)$ terhadap lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$!

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-5

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 2. Garis Singgung Lingkaran
Sub Materi	: 2.1. Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Berpusat di $(0,0)$ dan Jari-jari r . 2.2. Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Berpusat di (a,b) dan Jari-jari r .
Pertemuan	: ke - 5 (V)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- *Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.*
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. *Memprediksi* prasyarat persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari r dan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di (a,b) dengan jari-jari r .
2. *Merencanakan* rumus persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari r dan

persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di (a,b) dengan jari-jari r

3. *Memantau* proses menentukan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari r dan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di (a,b) dengan jari-jari r
4. *Mengevaluasi* hasil proses menentukan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari r dan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di (a,b) dengan jari-jari r

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-5, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka.

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah

dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-5, dan Brosur Strategi Metakognitif).

2. Mengingat kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.
3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi: (a) persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan (b) persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r .

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi pelajaran (**Fase II: 10 menit**)
2. Guru mempresentasikan materi tentang (a) persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r dan (b) persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r , sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen-komponen keterampilan metakognitif, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi melalui contoh soal 15, 16, 17 pada Buku Peserta didik halaman 21, 23 (**Fase II: 15 menit**)
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) (**Fase III: 15 menit**).

3. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-5 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi. (**Fase IV: 15 menit**)
4. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif peserta didik memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik (**Fase IV: 10 menit**)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta didik halaman 24 (Fase V).

VII. Penilaian

1. Teknik : Tes
2. Bentuk Instrumen : Tes tertulis
3. Instrumen :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$ di titik $(-2, 9)$.

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-6

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 2. Garis Singgung Lingkaran
Sub Materi	: 2.3. Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu
Pertemuan	: ke - 6 (VI)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- *Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.*
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. *Memprediksi prasyarat persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui dan persamaan garis singgung dengan gradien tertentu pada lingkaran menggunakan konsep dikriminan.*
2. *Merencanakan rumus menentukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui dan persamaan garis singgung dengan gradien tertentu pada lingkaran menggunakan konsep dikriminan.*
3. *Memantau proses menentukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui dan persamaan garis singgung*

dengan gradien tertentu pada lingkaran menggunakan konsep dikriminan.

4. *Mengevaluasi* hasil proses menentukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui dan persamaan garis singgung dengan gradien tertentu pada lingkaran menggunakan konsep dikriminan.

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-6, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka.

VII. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-6, dan Brosur Strategi Metakognitif).
2. Mengingatn kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.
3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).

4. Memotivasi peserta didik dengan melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi *garis singgung lingkaran dengan gradien tertentu*.

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi pelajaran (**Fase II: 10 menit**).
2. Mempresentasikan materi garis singgung dengan gradien tertentu pada suatu lingkaran, sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen-komponen keterampilan metakognitif, misalnya memantau, mengevaluasi melalui contoh soal 18, dari materi penting pada Buku Peserta didik halaman 26 (**Fase II: 15 menit**)
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) (**Fase III: 15 menit**).
4. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-6 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi. (**Fase IV: 15 menit**)
5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif peserta didik memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik (**Fase IV: 10 menit**)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.
2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta didik halaman 27 (Fase V).

VII. Penilaian

1. Teknik : Tes
2. Bentuk Instrumen : Tes tertulis
3. Instrumen :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 59$ jika diketahui gradien garis singgungnya -3 !

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)-7

Satuan Pendidikan	: SMA
Kelas/Semester	: XI-IPA/Ganjil
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: 2. Persamaan Lingkaran
Sub Materi	: 2.4. Garis Singgung Lingkaran di Suatu Titik di Luar Lingkaran
Pertemuan	: ke - 7 (VII)
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

I. Kompetensi Dasar

- Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

II. Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Setelah mengikuti pembelajaran ini peserta didik diharapkan dapat:

1. Memprediksi prasyarat persamaan garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran.
2. Merencanakan rumus menentukan persamaan garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran.
3. Memantau proses penggunaan rumus menentukan persamaan garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran.
4. Mengevaluasi hasil proses menentukan persamaan garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran.

III. Model Pembelajaran

Model pembelajaran yang mengoptimalkan keterampilan metakognitif (Model POKM).

IV. Metode Pembelajaran

Ekspositori, Penemuan Terbimbing, dan Pemecahan Masalah

V. Sumber Pembelajaran

Buku Peserta didik, Buku Guru, LKPD-7, dan Brosur Strategi Metakognitif.

VI. Alat dan Bahan:

Kertas Grafik, Mistar, dan Jangka.

IX. Langkah-langkah Pembelajaran

A. Pendahuluan (Fase I: 10 menit)

1. Mempersiapkan peserta didik belajar dengan meminta peserta didik menyiapkan perangkat pembelajaran yang sudah dibagikan pada pertemuan sebelumnya (Buku Peserta didik, LKPD-7, dan Brosur Strategi Metakognitif).
2. Mengingat kembali prosedur pembelajaran dengan model POKM.
3. Menyampaikan tujuan pembelajaran (kompetensi dasar dan indikator pencapaian hasil belajar).
4. Memotivasi peserta didik dengan melakukan apersepsi dengan mengingatkan kembali materi-materi sebelumnya serta kaitannya dengan materi *garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran*.

B. Kegiatan Inti (Fase II-IV: 65 menit)

1. Menjelaskan kembali beberapa komponen keterampilan metakognitif yang akan digunakan untuk membantu memahami materi dengan baik, seperti memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi pelajaran.
(Fase II: 10 menit)
2. Mempresentasikan materi *garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran*, sambil meminta peserta didik untuk menerapkan komponen keterampilan metakognitif, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi melalui contoh soal 20, 21 pada Buku Peserta Didik halaman 28, 30 (Fase II: 15 menit)
3. Memberikan latihan penerapan komponen keterampilan metakognitif dalam menyelesaikan soal (pemecahan masalah) (Fase III: 15 menit).
4. Meminta peserta didik untuk mengerjakan LKPD-7 sambil mengamati dan memberikan bimbingan kepada peserta didik menerapkan keterampilan metakognitif dalam pemecahan masalah, misalnya memprediksi, merencanakan, memantau, dan mengevaluasi (Fase IV: 15 menit)
5. Guru mengecek penerapan keterampilan metakognitif peserta didik memahami materi dan pemecahan masalah, kemudian guru memberikan umpan balik terhadap hasil pekerjaan peserta didik (Fase IV: 10 menit)

C. Penutup (Fase V: 15 menit)

1. Guru bersama-sama peserta didik membuat rangkuman dengan keterampilan metakognitif dari materi yang baru dipelajari.

2. Guru memberikan latihan menerapkan keterampilan metakognitif lanjutan secara mandiri dengan memilih soal yang ada pada buku peserta didik diakhir pertemuan. Soal dipilih dari Latihan 2 pada Buku Peserta didik halaman 31 (Fase V).

VII. Penilaian

1. Teknik : Tes
2. Bentuk Instrumen : Tes tertulis
3. Instrumen :

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 59$ jika diketahui garis singgungnya sejajar dengan garis $y = 4x + 1$!

BAB VII

PERANGKAT RISET PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA (LANJUTAN)

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 1

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

- 1.1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di $O(0,0)$ dan Jari-jari r
- 1.2. Posisi Titik terhadap Lingkaran yang Berpusat di $O(0,0)$ dan Jari-jari r

Indikator:

1. Merumuskan persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r .
2. Menentukan jari-jari lingkaran yang berpusat di $(0,0)$
3. Menentukan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r .

4. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika

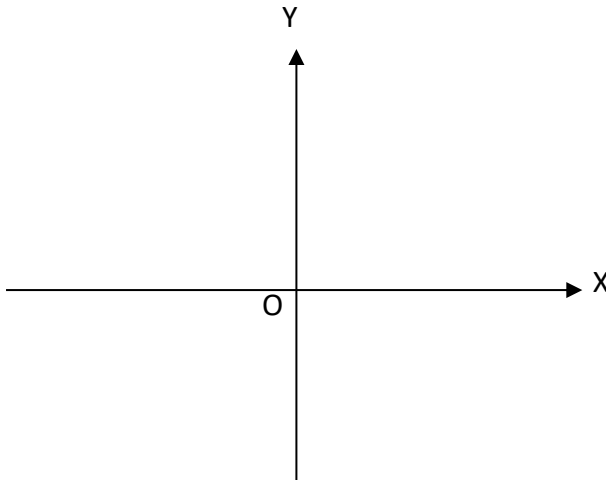
Soal 1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari $r = 3$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Gambarkan lingkaran tersebut dalam Sistem Koordinat Kartesius.



Tentukan sebarang titik $P(x,y)$ pada lingkaran tersebut!

- **Rencanakan:**

Tuliskan rumus mencari jarak antara titik $O(0,0)$ dengan titik $P(x,y)$!

.....

- **Monitoring:**

Cari jarak antara titik $O(0,0)$ dengan setiap titik $P(x,y)$ dengan menggunakan rumus jarak di atas

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah

.....

Soal 2

Tentukan jari-jari lingkaran dengan persamaan:

- $x^2 + y^2 = 36$
- $x^2 + y^2 - 7 = 18$
- $2x^2 + 2y^2 = 8$

Jawab:

- **Prediksi:**

Nyatakan persamaan lingkaran yang diberikan dalam bentuk: $x^2 + y^2 = r^2$

-
-
-

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara mencari jari-jari (r) dari persamaan yang diketahui?

.....

- **Monitoring:**

Cari jari-jari (r) dengan cara di atas!

- $r = \dots\dots\dots$
- $r = \dots\dots\dots$

c. $r = \dots\dots\dots$

• **Evaluasi:**

Jadi jari-jari (r) dari lingkaran:

a. $x^2 + y^2 = 36$, adalah $r = \dots\dots\dots$

b. $x^2 + y^2 - 7 = 18$ adalah $r = \dots\dots\dots$

c. $2x^2 + 2y^2 = 8$ adalah $r = \dots\dots\dots$

Soal 3

Selidikilah posisi titik-titik $(2,3)$, $(3, -4)$, $(5, 2)$ terhadap lingkaran dengan persamaan:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Jawab

• **Prediksi:**

Diketahui: $\dots\dots\dots$

Ditanyakan: $\dots\dots\dots$

• **Rencanakan:**

Misalkan masing-masing titik yang diketahui adalah (x, y) , kemudian substitusi masing-masing titik ke persamaan $x^2 + y^2 = 25$.

• **Monitoring:**

Substitusi titik $(2,3)$: $\dots\dots\dots$

Substitusi titik $(3,-4)$: $\dots\dots\dots$

Substitusi titik $(5,2)$: $\dots\dots\dots$

• **Evaluasi:**

Jadi:

Posisi titik $(2,3)$: $\dots\dots\dots$ karena $\dots\dots\dots$

Posisi titik $(3,-4)$: $\dots\dots\dots$ karena $\dots\dots\dots$

Posisi titik $(5,2)$: $\dots\dots\dots$ karena $\dots\dots\dots$

Posisi titik $(0,0)$: $\dots\dots\dots$ karena $\dots\dots\dots$

Soal 4

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan menyinggung garis $12x - 9y + 30 = 0$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tentukan hal-hal yang diketahui dalam soal!

.....

Gambarkan keadaan lingkaran dan garis tersebut pada kertas grafik!

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara mencari panjang jari-jari lingkaran tersebut?

.....

- **Monitoring:**

Carilah jari-jari lingkaran tersebut dengan cara di atas.

.....

Tentukan persamaan lingkaran yang diminta dalam soal.

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan menyinggung garis $12x - 9y + 30 = 0$ adalah

.....

.....

.....

.....

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 2

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

1.3 Persamaan Lingkaran yang Berpusat di $M(a,b)$ dan Jari-jari r

1.4 Posisi Titik terhadap Lingkaran yang Berpusat di $M(a,b)$ dan Jari-jari r

Indikator:

1. Merumuskan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
2. Menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan menyinggung garis g
3. Menentukan posisi titik terhadap lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
4. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan Persamaan lingkaran dengan ketentuan sebagai berikut:

a. Pusat $(-5, -3)$, $r = 7$

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan hal yang diketahui dan ditanyakan pada soal!

.....

- **Rencanakan:**
Bagaimana cara menentukan persamaan lingkaran berpusat pada (a,b) dan jari-jari r .
.....
- **Monitoring:**
Carilah persamaan lingkaran dengan cara di atas!
.....
- **Evaluasi:**
Jadi persamaan lingkaran yang berpusat pada $(-5,-3)$ dan $r = 7$ adalah:
.....

b. Pusat $(3,7)$, $r^2 = 15$

Jawab:

- **Prediksi:**
Tuliskan hal yang diketahui dan ditanyakan dalam soal!
.....
- **Rencanakan:**
Bagaimana cara menentukan persamaan lingkaran berpusat pada (a,b) dan jari-jari r .
.....
- **Monitoring:**
Tentukanlah persamaan lingkaran tersebut!
.....
- **Evaluasi:**
Jadi persamaan lingkaran yang berpusat pada $(3,7)$, dan $r^2 = 15$ adalah
.....

Soal 2

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(7,-8)$ dan menyinggung garis $x - y = 0$.

Jawab:

- **Prediksi**

Tuliskan hal-hal yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

.....
.....

Gambarkan keadaan lingkaran dan garis tersebut.

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara mendapatkan panjang jari-jari lingkaran tersebut?

.....

- **Monitoring:**

Carilah jari-jari lingkaran tersebut.

.....
.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di $(7,-8)$ dan menyinggung garis $x - y = 0$ adalah.

.....

Soal 3

Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran berpusat di $(1,3)$ dengan jari-jari 5.

- a. $P(0,0)$ b. $Q(7,5)$ c. $R(6,3)$

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal!

.....

- **Rencanakan:**

Bagaimana bentuk persamaan lingkaran berpusat pada (a,b) dan jari-jari r ?

.....

- **Monitoring:**

Misalkan masing-masing titik yang diketahui adalah (x, y) , kemudian substitusi masing-masing titik kepersamaan lingkaran di atas!

Substitusi titik $(0,0)$:

Substitusi titik $(7,5)$:

Substitusi titik $(6,3)$:

- **Evaluasi:**

Jadi:

Kesimpulan dari hasil perhitungan di atas:

Posisi titik $(0,0)$: karena

Posisi titik $(7,5)$: karena

Posisi titik $(6,3)$: karena

Adakah cara lain untuk menjawab soal nomor 3 di atas? Sebutkan.

.....

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 3

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

1.5. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Indikator

1. Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.
2. Menentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.
3. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan:

a. $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$

b. $3x^2 + 3y^2 - 9x - 9y + \frac{1}{2} = 0$

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal!

a.

b.

Tuliskan bentuk umum persamaan lingkaran!

Ubahlah persamaan lingkaran pada soal b menjadi bentuk umum!

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara menentukan pusat dan jari-jari lingkaran!

- **Monitoring:**

Cari pusat dan jari-jari lingkaran pada soal dengan dengan cara di atas!

a.

b.

- **Evaluasi:**

Jadi lingkaran:

a. $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$, pusat, jari-jari

b. $3x^2 + 3y^2 - 9x - 9y + \frac{1}{2} = 0$, pusat, jari-jari

Soal 2

Tentukan persamaan lingkaran dalam bentuk umum jika diketahui pusat $(-3, 2)$ dan jari-jari 4.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan soal tersebut!

- **Rencanakan:**

Misalkan persamaan yang dimaksud adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Bagaimana cara mencari nilai A, B dan C!

.....

- **Monitoring:**

Cari nilai A, B, dan C dengan cara di atas, kemudian cari persamaan lingkarannya!

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan lingkaran dalam bentuk umum jika diketahui pusat $(-3, 2)$ dan jari-jari 4 adalah:

.....

Cara lain:

Gunakan rumus $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

.....

Persamaan lingkarannya adalah:

.....

Soal 3

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik $(0,4)$, $(1, -1)$, dan $(1,3)$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

.....

- **Rencanakan:**

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik yang diketahui.

.....

- **Monitoring:**

Substitusi masing-masing titik ke persamaan tersebut!

Titik $(0,4)$ pada lingkaran, maka diperoleh
..... sebut persamaan (1)

Titik $(1,-1)$ pada lingkaran, maka diperoleh
..... sebut persamaan (2)

Titik $(1,3)$ pada lingkaran, maka diperoleh
..... sebut persamaan (3)

Hitung nilai A, B, dan C dengan metode eliminasi:
.....

- **Evaluasi:**

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui $(0, 4)$, $(1, -1)$, dan $(1, 3)$ adalah
.....

Soal 4

Diketahui persamaan lingkaran $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 11 = 0$

a. Tentukan nilai kuasa titik $P(3,q)$ terhadap lingkaran.

b. Berapakah nilai q, jika titik P terletak pada lingkaran ?

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.
.....

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara menentukan nilai kuasa?
.....

Bagaimana hubungan nilai kuasa dengan titik yang teletak pada lingkaran?
.....

- **Monitoring:**

Cari nilai kuasa dengan cara di atas!
.....

Selanjutnya cari nilai q.
.....

- **Evaluasi:**

Jadi

- a. Nilai kuasa titik $P(3, q)$ terhadap lingkaran $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 11 = 0$ adalah

.....

- b. Nilai q jika titik P terletak pada lingkaran $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 11 = 0$ adalah

.....

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 4

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

1.6 Posisi Garis terhadap Suatu Lingkaran

Indikator:

1. Mengkonstruksi syarat untuk menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan rumus jarak.
2. Menentukan posisi garis terhadap lingkaran tertentu dengan menggunakan diskriminan.
3. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam pemecahan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan kedudukan garis $g \equiv y = 5x + 3$ terhadap lingkaran

$$L \equiv x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Jawab:

- **Prediksi:**

Gambarkan posisi garis dengan lingkaran tersebut di atas dalam Sistem Koordinat Kartesius.

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara menentukan jarak antara titik pusat dengan garis g ?

.....

- **Monitoring:**

Bandingkan panjang jari-jari lingkaran (r) dengan jarak antara pusat lingkaran dengan garis g .

.....

- **Evaluasi:**

Jadi kedudukan garis $g \equiv y = 5x + 3$ terhadap lingkaran

$$L \equiv x^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ adalah:}$$

.....

Apa ada cara lain?

.....

Soal 2

Selidiki posisi garis $y = x$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

.....

- **Rencanakan:**

Bagaimana cara menentukan jarak antara titik pusat dengan garis g ?

.....

- **Monitoring:**

Dengan menggunakan rumus di atas, diperoleh jarak antara titik pusat dengan garis g :

.....

.....

 • **Evaluasi:**

Jadi posisi garis $y = x$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ adalah

Soal 3

Tentukan nilai m agar garis g dengan persamaan $y = mx + 3$,
 menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$

Jawab:

• **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

• **Rencanakan:**

Substitusi garis g ke persamaan lingkaran yang diketahui.

• **Monitoring:**

Cari nilai m dengan rumus diskriminan (syarat garis g menyinggung lingkaran).

• **Evaluasi:**

Jadi nilai m agar garis g dengan persamaan $y = mx + 3$,
 menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$ adalah

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 5

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

2.1 Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Berpusat di $O(0,0)$ atau Berpusat di $M(a,b)$ dengan jari-jari r

Indikator:

1. Menentukan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r .
2. Menentukan persamaan garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
3. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 30$ di titik $P(-5, \sqrt{5})$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan hal-hal yang diketahui dan ditanyakan pada soal.

.....
.....

Selidiki posisi titik P terhadap lingkaran L.

.....
.....

- **Rencanakan:**

Tuliskan rumus persamaan garis singgung lingkaran yang akan dipergunakan.

.....

- **Monitoring:**

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang ditanyakan.

.....

.....

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 30$ di titik $P(-5, \sqrt{5})$ adalah:

.....

Soal 2

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di $(-3, 3)$ dengan $r = 4$ di titik $(1, 3)$.

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

.....

- **Rencanakan:**

Tuliskan langkah-langkah untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang ditanyakan pada soal di atas.

.....

- **Monitoring:**

Gunakan langkah-langkah pada jawaban di atas untuk menentukan persamaan singgung lingkaran yang ditanyakan.

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di $(-3, 3)$ dengan $r = 4$ di titik $(1, 3)$ adalah :

.....

Soal 3

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ yang melalui titik $(7, 2)$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

.....

.....

- **Rencanakan:**

Bagaimana rumus menentukan persamaan garis singgung lingkaran.

.....

.....

- **Monitoring:**

Cari persamaan garis singgung dengan menggunakan rumus di atas.

.....

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ yang melalui titik $(7, 2)$ adalah

.....

.....

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 6

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

2.2 Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu

Indikator:

1. Menentukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui.
2. Menentukan persamaan garis singgung dengan gradien tertentu pada lingkaran menggunakan diskriminan.
3. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 10$ yang bergradien -2 .

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan hal-hal yang diketahui dan ditanyakan dalam soal!

.....
.....

- **Rencanakan:**

Tuliskan rumus persamaan garis singgung bergradien m pada lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r .

.....

- **Monitoring:**

Tentukan persamaan garis singgung dengan rumus di atas.

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 10$ yang bergradien -2 adalah

.....

Soal 2

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$ yang gradiennya dua kali gradien garis $2y - 3x = 1$

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan hal-hal yang diketahui dan ditanyakan dalam soal yang berkaitan dengan persamaan garis singgung laingkaran.

.....

- **Rencanakan:**

Tuliskan langkah-langkah yang akan kamu tempuh untuk menyelesaikan soal di atas.

.....

- **Monitoring:**

Gunakan langkah-langkah di atas untuk menentukan persamaan garis singgung yang ditanyakan.

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$ yang gradiennya dua kali gradien garis $2y - 3x = 1$ adalah

.....

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD) - 7

Waktu: 15 menit

Nama:

Tanggal:

2.3 Persamaan Garis Singgung dari Suatu Titik di Luar Lingkaran

Indikator:

1. Menentukan garis singgung lingkaran di suatu titik di luar lingkaran.
2. Menentukan titik singgung lingkaran dari garis singgung disuatu titik di luar lingkaran
3. Menerapkan keterampilan metakognitif (prediksi, perencanaan, monitoring, evaluasi) dalam memecahkan masalah matematika.

Soal 1

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik $(10,0)$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Tuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan dalam soal!

.....

Ilustrasikan garis singgung yang ditanyakan melalui gambar.

- **Rencanakan:**

Tentukan rumus persamaan garis singgung yang ditanyakan dengan cara yang kamu anggap mudah.

.....

- **Monitoring:**

Cari persamaan garis singgung yang ditanyakan dengan rumus di atas!

.....

- **Evaluasi:**

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik $(10,0)$ adalah:

.....

Soal 2

Tentukan titik singgung dari garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ yang melalui titik $(3,5)$.

Jawab:

- **Prediksi:**

Ilustrasikan garis singgung yang ditanyakan melalui gambar.

- **Rencanakan:**

Tuliskan langkah-langkah yang akan ditempuh untuk menyelesaikan soal di atas.

- **Monitoring:**

Gunakan langkah-langkah pada jawaban di atas untuk menentukan titik singgung yang ditanyakan.

.....

- **Evaluasi:**

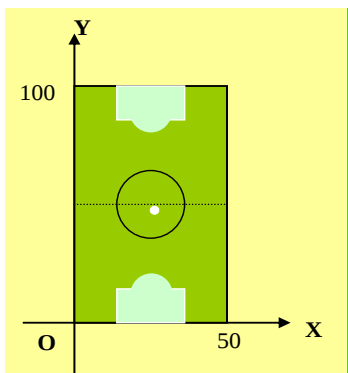
Jadi titik singgung dari garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ yang melalui titik $(3,5)$ adalah

.....

BAB VIII

MATERI KAJIAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

SEKILAS TENTANG LINGKARAN



Denah Lapangan Sepak Bola

Standar Kompetensi

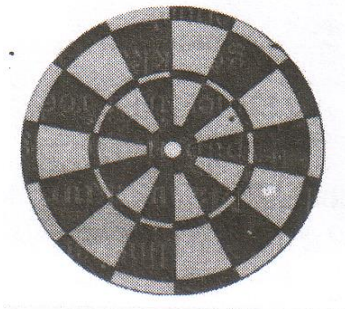
Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya

Kompetensi Dasar

- Merumuskan persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.



Mobil Formula 1



Permainan Hiburan

Indikator

- Merumuskan persamaan lingkaran yang
- berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r .
- Menentukan posisi titik terhadap
- lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r
- Merumuskan persamaan lingkaran yang
- berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
- Menentukan posisi titik terhadap
- lingkaran yang berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
- Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran
- yang persamaannya diketahui.
- Menentukan persamaan lingkaran yang
- memenuhi kriteria tertentu.
- Menentukan posisi garis terhadap
- lingkaran tertentu
- Menentukan persamaan garis
- singgung yang melalui satu titik pada
- lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r
- Menentukan persamaan garis
- singgung yang melalui satu titik pada
- lingkaran berpusat di (a,b) dan jari-jari r .
- Menentukan persamaan garis
- singgung yang gradiennya diketahui.
- Menentukan garis singgung
- lingkaran di suatu titik di luar
- lingkaran.

SEKILAS TENTANG KETERAMPILAN METAKOGNITIF

Contoh Penerapan Keterampilan Metakognitif	
Masalah Matematika: - Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y = 101$ Ditanyakan: Pusat dan jari-jari lingkaran?	Kompetensi Dasar Memahami keterampilan metakognitif dan menerapkannya dalam memecahkan masalah pada topik lingkaran.
Perencanaan: - Ubahlah persamaan pada soal menjadi bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. - Mencari pusat lingkaran dengan cara: $(-1/2 A, -1/2 B)$ - Sedangkan mencari jari-jari lingkaran dengan cara $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$	Indikator - Menerapkan keterampilan metakognitif memprediksi dalam memecahkan masalah lingkaran. - Menerapkan keterampilan metakognitif merancang rencana dalam memecahkan masalah lingkaran.
Monitoring: - Selanjutnya akan diperoleh: $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y - 101 = 0$ $x^2 + y^2 - 2x - 6y = \frac{101}{2}$ (sama-sama dibagi 2) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{101}{2} = 0$, dari persamaan ini diperoleh $A = -2$, $B = -6$, dan $C = -\frac{101}{2}$	

• Pusat lingkaran: $\left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(-6)\right) = (1, 3)$ • Jari-jari lingkaran: $r =$ $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$ $r = \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{4}(-6)^2 - \left(-\frac{101}{2}\right)}$ $r = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11}{2}\sqrt{2}$	• Menerapkan keterampilan metakognitif pemantauan dalam memecahkan masalah lingkaran. • Menerapkan keterampilan metakognitif mengevaluasi dalam memecahkan masalah lingkaran.
Evaluasi: Jadi: • Pusat lingkaran: (1, 3) • Jari-jari lingkaran $= \frac{11}{2}\sqrt{2}$	

Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung

Motivasi

Standar Kompetensi

Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya

Kompetensi Dasar

- Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan.
- Menyusun persamaan garis singgung pada lingkaran dalam beberapa situasi.

Tentu kalian sering melihat benda-benda yang berbentuk lingkaran. Karena lingkaran telah jadi bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Benda-benda banyak dibuat dalam bentuk lingkaran, mengapa? Banyak alasan yang mungkin ditemukan: elegan, cantik, praktis adalah beberapa

alasan yang biasa dikemukakan. Koin, jam, cincin, gelang, beberapa jenis kue, karet gelang, piring, atau beberapa jenis kacamata merupakan beberapa contoh benda yang dibuat berbentuk lingkaran dengan alasan keeleganan atau kepraktisan. Bahkan dalam bidang transportasi, bentuk lingkaran ternyata sangat bermanfaat untuk menjalankan kendaraan. Coba kalian perhatikan bentuk ban mobil. Bentuk ban mobil adalah lingkaran, sehingga mobil dapat berjalan dengan mulus. Coba kalian bayangkan jika ban mobil berbentuk persegi atau yang lainnya. Apa akibatnya?



Tak jarang, dalam kejadian sehari-hari, bahasa lingkaran jadi alat komunikasi yang paling tepat untuk menyampaikan suatu informasi. Misalnya dengan mengatakan suatu gempa mengguncang kota A dengan pusat di titik B dan radius r km. Dengan informasi ini kita bisa mengetahui apakah keluarga kita di kota C yang tak jauh dari kota A merasakan dampak dari gempa atau tidak.

Tahun 1883 Gunung Krakatau di Propinsi Banten meletus dan konon debunya mencapai Hawaii. Dapatkah kalian perkirakan berapa radius dampak letusan Gunung Krakatau?

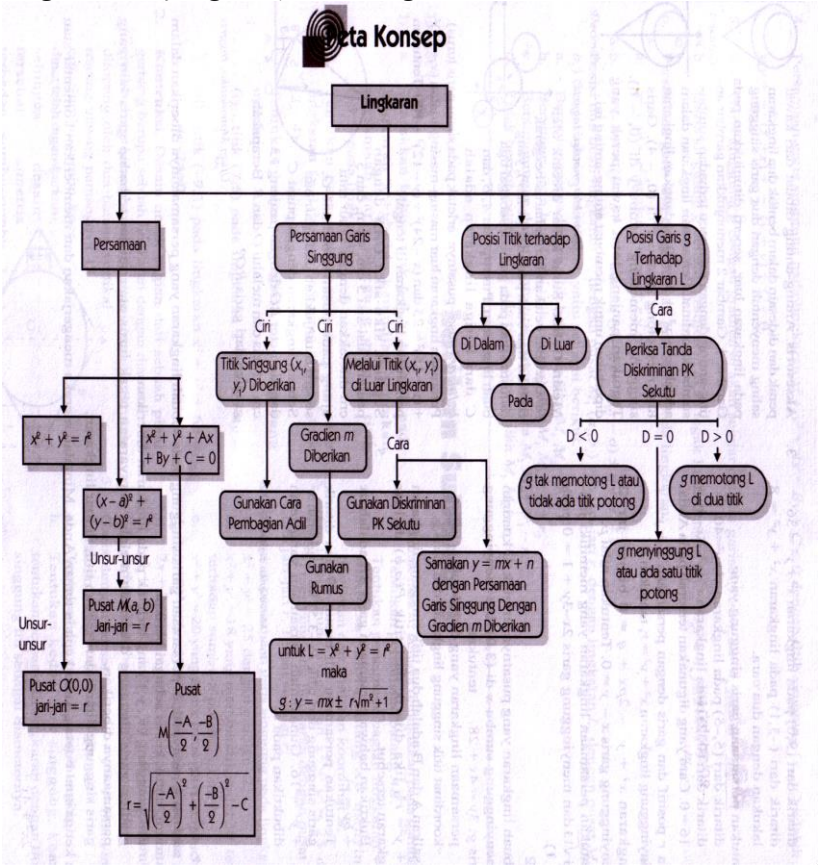
Hebatnya, lingkaran dapat menjelaskan di mana sebenarnya epicenter (pusat gempa) berada. Misalnya gempa di kota Kobe pada tahun 1995 merenggut lebih dari 4000 nyawa dan mengakibatkan kerugian triliun dolar.

Pengetahuan tentang lingkaran yang telah dipelajari terbatas pada keliling dan luasnya saja. Pada bab ini, kita akan

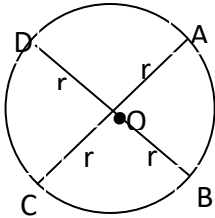
mempelajari banyak aspek tentang lingkaran, misalnya persamaan-persamaan lingkaran dan garis-garis singgung pada lingkaran. Ingat, yang kita pelajari lebih pada teori tentang lingkaran. Jangan anggap remeh pembahasan teori, karena suatu saat pemahaman kita tentang teori akan sangat membantu kita menjelaskan peristiwa-peristiwa yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari.

Diagram Alur

Untuk mempermudah Anda dalam mempelajari bab ini, pelajirlah diagram alur yang disajikan sebagai berikut.



Pengertian Lingkaran



Definisi Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu yang disebut pusat lingkaran.

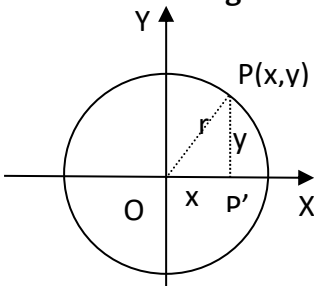
Dari gambar di atas, titik O adalah pusat lingkaran. Titik A, B, C, D terletak pada lingkaran, maka $OA=OB = OC=OD$ adalah jari-jari lingkaran = r .

Definisi Jari-jari Lingkaran

Jari-jari lingkaran adalah jarak antara pusat lingkaran dengan titik pada lingkaran. Jari-jari dilambangkan oleh r .

1. Persamaan Lingkaran

1.1 Persamaan Lingkaran yang Berpusat di $O(0, 0)$



Perhatikan Gambar di samping. Menurut definisi, L (lingkaran) adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu yang dinamakan pusat lingkaran. Karena pusat lingkaran adalah O dan jaraknya adalah r , maka $L \equiv \{P | OP = r\}$, yaitu himpunan semua titik P sehingga jarak $OP = r$. Jika koordinat $P(x, y)$, maka

$$L \equiv \{(x,y) \mid OP=r\}$$

$$L \equiv \{(x,y) \mid \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r\}$$

$$L \equiv \{(x,y) \mid (x-o)^2 + (y-o)^2 = r^2\} \text{ atau}$$

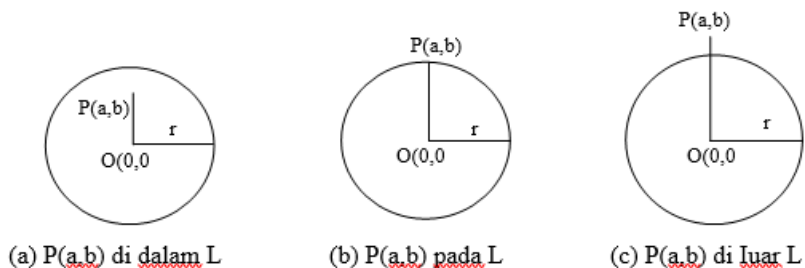
$L \equiv \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, yaitu himpunan semua koordinat (x,y) yang jaraknya terhadap $O(0,0)$ adalah r .

Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$

1.2. Posisi Suatu Titik Terhadap Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$

Berdasarkan persamaan lingkaran, kita dapat menentukan posisi titik $P(a,b)$ terhadap lingkaran L yang berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari r sebagai berikut.

- 1) $P(a,b)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 < r^2$
- 2) $P(a,b)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 = r^2$
- 3) $P(a,b)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 > r^2$



Gambar 4.2

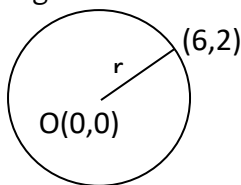
Posisi titik-titik $P(a,b)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ (di dalam, pada, dan di luar lingkaran) diperlihatkan pada Gambar 4.2.

Contoh 1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan melalui titik $(6,2)$.

Jawab

Prediksi : Diketahui: Pusat $O(0,0)$, titik $(6,2)$ dilalui (pada) lingkaran.



Ditanyakan: Persamaan lingkaran?

Rencanakan : Cari r dengan rumus $x^2 + y^2 = r^2$

Monitoring : $6^2 + 2^2 = r^2$
 $40 = r^2$
 $r = 2\sqrt{10}$

Evaluasi : Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari $2\sqrt{10}$ adalah $x^2 + y^2 = 40$

Contoh 2

Tentukan posisi titik-titik $A(4,-5)$, $B(3,7)$, $C(8,9)$, dan $D(2,1)$ terhadap lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 58$.

Jawab

Prediksi: Diketahui: Lingkaran berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari $r^2 = 58$ atau $r = \sqrt{58}$
Titik $A(4, -5)$, $B(3, 7)$, $C(8, 9)$, dan $D(2, 1)$ pada lingkaran tersebut.

Ditanyakan: Posisi titik A, B, C dan D?

Rencanakan:

Cari jarak suatu titik ke titik pusat lingkaran dengan rumus: $x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 < r^2$ titik (x,y) terletak dalam lingkaran

$x^2 + y^2 = r^2$ titik (x,y) terletak pada lingkaran

$x^2 + y^2 > r^2$ titik (x,y) terletak di luar lingkaran

Monitoring:

Posisi (4, -5) : karena $4^2 + (-5)^2 = 41 < r^2$, maka (4, -5) terletak di dalam lingkaran.

Posisi (3, 7) : karena $3^2 + 7^2 = 58 = r^2$, maka (3, 7) terletak pada lingkaran.

Posisi (8, 9) : karena $8^2 + 9^2 = 145 > r^2$, maka (8, 9) terletak di luar lingkaran.

Posisi (2, 1) : karena $2^2 + 1^2 = 5 < 58$, maka (2, 1) terletak di dalam lingkaran.

Evaluasi:

Jadi Titik (4,-5) dan (2,1) terletak dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 58$.

Titik (8,9) terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 58$.

Titik (3,7) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 58$.

Contoh 3

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0,0) dan menyinggung garis $4x - 3y = 5$

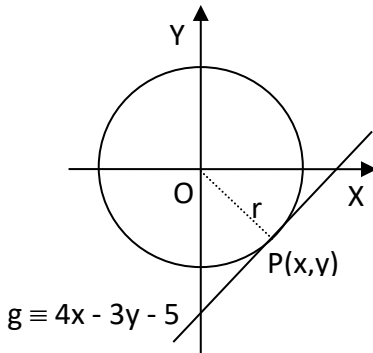
Jawab

Diketahui: Pusat lingkaran (0,0) dan garis $4x - 3y = 5$

Perhatikan gambar di bawah.

Prediksi:

Ditanyakan: Persamaan lingkaran?



Rencanakan: Untuk menentukan persamaan lingkaran harus tahu berapa nilai r .

Rumus jarak antara sembarang titik $P(x_1, y_1)$ dengan sembarang garis $ax + by + c = 0$, yaitu:

$$r = \left| \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Monitoring: Maka jarak antara titik $O(0, 0)$ dengan garis $4x - 3y - 5 = 0$ adalah

$$r = \left| \frac{4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = 1$$

Evaluasi: Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan menyinggung garis $4x - 3y = 5$ adalah $x^2 + y^2 = 1$.

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
2. Untuk memperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah menggunakan jarak antara pusat lingkaran $O(0,0)$ dengan sebarang titik $P(x,y)$ pada lingkaran sama dengan r .

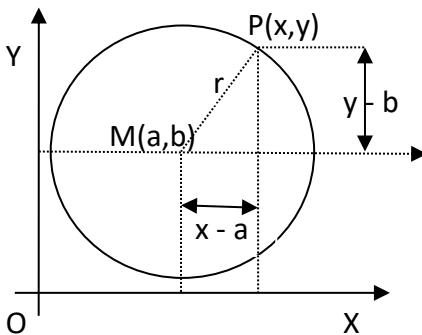
3. Posisi titik $P(a,b)$ terhadap lingkaran L yang berpusat di $O(0, 0)$ dengan jari-jari r sebagai berikut:
 - a. $P(a, b)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 < r^2$.
 - b. $P(a, b)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 = r^2$.
 - c. $P(a, b)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jika $a^2 + b^2 > r^2$.

LATIHAN 1

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan melalui titik:
 - a. $(4, 2)$
 - b. $(-2, 1)$
 - c. $(3, -2)$
 - d. $(-4, -5)$
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran di bawah ini.
 - a. $x^2 + y^2 = 18$
 - b. $2x^2 + 2y^2 = 48$
 - c. $3x^2 + 3y^2 = 48$
 - d. $x^2 + y^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. Gambarkanlah pada bidang Cartesius himpunan:
 - a. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 36\}$
 - b. $\{(x, y) | x^2 + y^2 > 25\}$
 - c. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$
4. Tentukan p jika titik yang diketahui terletak pada lingkaran yang ditentukan sebagai berikut.
 - a. $(-3, p), x^2 + y^2 = 13$
 - b. $(p, 5), 2x^2 + 2y^2 = 82$
 - c. $(p, -2), 3x^2 + 3y^2 = 39$

- d. $(p, p), 4x^2 + 4y^2 = 64$
 e. $(3p, p), x^2 + y^2 = 90$
 5. Hitunglah luas daerah antara lingkaran $3x^2 + 3y^2 = 18$ dan lingkaran $2x^2 + 2y^2 = 30$.

1.3. Persamaan Lingkaran Berpusat di $M(a,b)$ dan Jari-Jari r



Perhatikan Gambar 4.3. Titik $P(x, y)$ adalah titik pada lingkaran L yang berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r , maka:

$$L \equiv \{P(x, y) \mid MP = r\}$$

$$L \equiv \{(x, y) \mid \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\}$$

$$L \equiv \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

Persamaan lingkaran yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

1.4. Posisi Suatu Titik Terhadap Lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Lingkaran yang berpusat di (a, b) secara singkat ditulis juga $L(a, b)$. Posisi titik $Q(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran yang berpusat di (a, b) dengan jari-jari r adalah sebagai berikut.

Catatan:

1. Jarak pusat lingkaran dgn titik Q lebih pendek dari jari-jari

2. Jarak pusat lingkaran dgn titik Q sama dgn panjang jari-jari

3. Jarak pusat lingkaran dgn titik Q lebih panjang dari jari-jari

1. $Q(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

$$\text{atau } L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$$

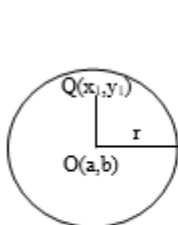
2. $Q(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ atau

$$L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$$

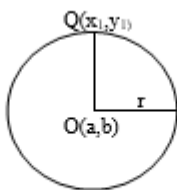
3. $Q(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$ atau

$$L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$$

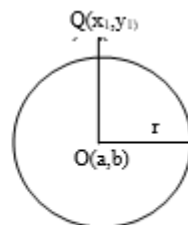
Posisi titik-titik $Q(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $L \equiv (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ atau $L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$ (di dalam, pada, dan di luar lingkaran) diperlihatkan pada Gambar 4.4.



(a) $Q(x_1, y_1)$ di dalam L



(b) $Q(x_1, y_1)$ pada L



(c) $Q(x_1, y_1)$ di luar L

Contoh 4

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(3, -7)$ dengan $r = 5$

Jawab

Prediksi: Diketahui: Pusat lingkaran $(3, -7)$, $a = 3$, $b = -7$ dan $r = 5$
Ditanyakan: Persamaan lingkaran?

Rencanakan: Rumus persamaan lingkaran berpusat (a,b) adalah:
 $(x - a)^2 + (y+b)^2 = r^2$

Monitoring: Dengan menggunakan rumus persamaan lingkaran di atas, diperoleh
 $(x - 3)^2 + (y+7)^2 = 25$

Evaluasi: Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (3, -7) dan jari-jari 5 adalah $(x - 3)^2 + (y+7)^2 = 25$.

Contoh 5

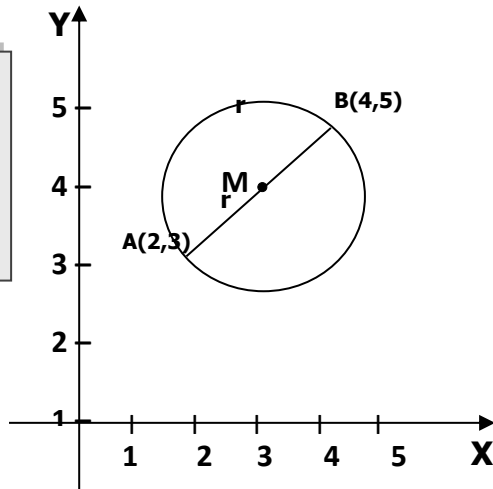
Tentukan persamaan lingkaran yang ujung diameternya di titik (2, 3) dan (4,5).

Jawab

Prediksi: Diketahui: Dua titik pada lingkaran, titik $A(x_1, y_1) = (2,3)$ dan $B(x_2, y_2) = (4,5)$
Ditanyakan: Persamaan lingkaran?
Perhatikan gambar di bawah ini.

Catatan:

Menggambar merupakan salah satu bentuk prediksi dalam memecahkan masalah



Rencanakan: Pusat lingkaran dihitung dengan:

$$M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) = M(a, b)$$

Jari-jari lingkaran dihitung dengan:

$$r = MB = \sqrt{(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2}$$

Monitoring: Dengan menggunakan rumus

$$M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) \text{ diperoleh}$$

$$M\left(\frac{1}{2}(2 + 4), \frac{1}{2}(3 + 5)\right) \text{ atau } M(a, b) = (3, 4)$$

Dengan menggunakan rumus

$$r = MB = \sqrt{(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2} \text{ diperoleh}$$

Jari-jari lingkaran:

$$r = MB = \sqrt{(4 - 3)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Evaluasi:

Jadi, persamaan lingkaran yang ujung diameternya di titik (2, 3) dan (4, 5) adalah

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$$

Contoh 6

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (3, -2) dan menyinggung sumbu Y.

Jawab

Prediksi:

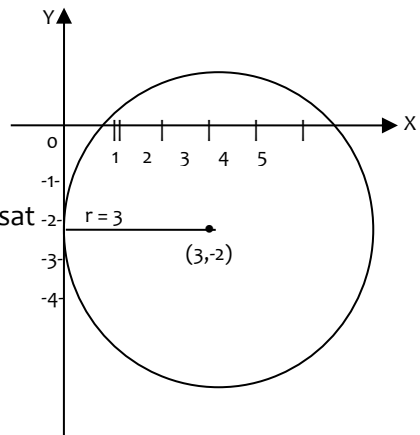
Diketahui: Pusat (3, -2), a = 3, b = -2

Ditanyakan: Persamaan lingkaran?

Perhatikan gambar lingkaran berpusat di (3, -2) dan menyinggung sumbu Y

Rencana:

Gunakan rumus: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



Monitoring:

Berdasarkan gambar tersebut diketahui bahwa jari-jari lingkaran adalah $r = 3$, $a = 3$, dan $b = -2$

Dengan rumus $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ diperoleh persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

Evaluasi: Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di $(3, -2)$ dan menyinggung sumbu Y adalah $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

Contoh 7

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 1)$ dan menyinggung garis $4x + 3y + 4 = 0$.

Jawab**Prediksi:**

Diketahui: Lingkaran dengan pusat $(a, b) = (2, 1)$

Garis $4x + 3y + 4 = 0$ dengan koefisien $p = 4$, $q = 3$ dan $c = 4$

Ditanyakan: Persamaan lingkaran?

Rencanakan: Jarak titik $(2, 1)$ dengan garis $4x + 3y + 4 = 0$ adalah r

Cari r dengan rumus: $r = \frac{|p \cdot a + q \cdot b + 4|}{\sqrt{p^2 + q^2}} =$

Monitoring: Jarak titik $(2, 1)$ dengan garis $4x + 3y + 4 = 0$ dengan menggunakan rumus

di atas diperoleh $r = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|15|}{5} = 3$

Evaluasi: Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 1)$ dan menyinggung garis $4x + 3y + 4 = 0$ adalah $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Contoh 8

Tentukan posisi titik $P(5,1)$, $Q(3,-4)$, dan $R(7,3)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Jawab

Prediksi: **Diketahui: Titik** $P(5,1)$, $Q(3,-4)$, dan $R(7,3)$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
Ditanyakan: Posisi titik P , Q , dan R .

Rencanakan:

Titik (x_1, y_1) terletak di luar lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$ atau $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

Titik (x_1, y_1) terletak di luar lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ atau $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

Titik (x_1, y_1) terletak di dalam lingkaran $L(a, b)$ jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$ atau $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$

Monitoring:

Cara I: Ubah terlebih dahulu persamaan lingkaran

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ke dalam bentuk baku. Sehingga diperoleh

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 12 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 12 = 0 + 4 + 9 \dots\dots(\text{kedua ruas ditambah 4 dan 9})$$

$$(x - 2)^2 - (y + 3)^2 - 12 = 13$$

$$(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 25$$

Titik $P(5,1)$ terletak pada lingkaran karena $(5 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 25$

Titik $Q(3,-4)$ terletak di dalam lingkaran

karena $(3 - 2)^2 + (-4 + 3) < 25$

Titik R(7,3) terletak di luar lingkaran karena $(7 - 2)^2 + (3 + 3)^2 > 25$

Cara II. Substitusi titik-titik ke dalam persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Titik P(5,1) terletak pada lingkaran,

$$\text{karena } 5^2 + 1^2 - 4(5) + 6(1) - 12 = 0$$

Titik Q(3,-4) terletak di dalam lingkaran,

$$\text{karena } 3^2 + (-4)^2 - 4(3) + 6(-4) - 12 < 0$$

Titik R(7,3) terletak di luar lingkaran,

$$\text{karena } 7^2 + 3^2 - 4(7) + 6(3) - 12 > 0$$

Evaluasi: Jadi, Titik P(5,1) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Titik Q(3,-4) terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Titik R(7,3) terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di $M(a,b)$ dan jari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
2. Untuk memperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di $M(a,b)$ dan jari-jari r adalah
3. menggunakan jarak antara pusat lingkaran $M(a,b)$ dengan sebarang titik $P(x,y)$ pada lingkaran sama dengan r .
4. Posisi titik $Q(c, d)$ terhadap lingkaran yang berpusat di $M(a,b)$ dengan jari-jari r adalah sebagai berikut.
 - a. $Q(c, d)$ terletak di dalam lingkaran $L(a,b)$ jika $(c - a)^2 + (d - b)^2 < r^2$ atau $L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$
 - b. $Q(c,d)$ terletak pada lingkaran $L(a,b)$ jika $(c - a)^2 + (d - b)^2 = r^2$ atau $L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

- c. $Q(c,d)$ terletak di luar lingkaran $L(a,b)$ jika $(c-a)^2 + (d-b)^2 > r^2$ atau $L \equiv x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$
5. Jika jarak titik $Q(c,d)$ terhadap pusat lingkaran $M(a,b)$ disimbolkan d dan jari-jari lingkaran adalah r , maka posisi titik $Q(c,d)$ terhadap lingkaran yang berpusat di $M(a,b)$ dengan jari-jari r adalah sebagai berikut:
- $Q(c,d)$ terletak di dalam lingkaran $L(a,b)$ jika $d < r$.
 - $Q(c,d)$ terletak pada lingkaran $L(a,b)$ jika $d = r$.
 - $Q(c,d)$ terletak di luar lingkaran $L(a,b)$ jika $d > r$.

Latihan 2

- Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat dan jari-jari sebagai berikut.
 - $(2, 3)$; 5
 - $(-2, 1)$; 4
 - $(7, -8)$; $\sqrt{7}$
 - $(1, -1)$; 1
- Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan berikut.
 - $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$
 - $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 36$
 - $x^2 + (y+10)^2 = 10$
 - $3x^2 + 3(y-5)^2 = 48$
- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(1, 6)$ dan melalui titik $(2, 3)$.
- Tentukan persamaan lingkaran jika salah satu ujung-ujung diameternya $(2, -1)$ dan $(0, 0)$.
- Bagaimana posisi titik-titik berikut ini (di dalam, pada, atau di luar lingkaran yang diketahui)?
 - $P(-1, 6)$, $Q(1, 4)$, dan $R(-3, 5)$
 - $K(-2, 1)$, $L(-1, 0)$, dan $M(5, 4)$. Terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$
- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-3, 1)$ dan menyinggung garis $y = x + 2$.

1.5. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Pada pembahasan sebelumnya kita telah memperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di (a, b) dengan jari-jari r , yaitu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Jika bentuk ini kita uraikan lebih jauh, maka diperoleh:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Misalkan:

$A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$,

maka $a = -\frac{1}{2}A$, $b = -\frac{1}{2}B$ dan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Persamaan lingkaran menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Persamaan ini disebut bentuk umum persamaan lingkaran yang

berpusat di $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dengan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.

Catatan:

Jika bentuk umum persamaan lingkaran adalah:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

maka pusatnya $(-A, -B)$ dan

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

Bentuk umum persamaan lingkaran yang berpusat di $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \text{ adalah}$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Posisi sembarang titik $R(k, l)$ pada lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah sebagai berikut.

1. Jika titik $R(k, l)$ terletak di dalam lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C < 0$
2. Jika titik $R(k, l)$ terletak pada lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C = 0$
3. Jika titik $R(k, l)$ terletak di luar lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C > 0$

Nilai $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C$ disebut *kuasa titik R terhadap lingkaran* dan dilambangkan K . Secara umum posisi titik $R(k, l)$ terhadap lingkaran dengan menggunakan lambang kuasa K sebagai berikut.

1. Jika titik $R(k, l)$ terletak di dalam lingkaran, maka $K < 0$.
2. Jika titik $R(k, l)$ terletak pada lingkaran, maka $K = 0$.
3. Jika titik $R(k, l)$ terletak di luar lingkaran, maka $K > 0$.

Contoh 8

Tuliskan persamaan umum lingkaran yang berpusat di $(-7, 3)$ dengan jari-jari 5!

Jawab

Prediksi:

$$\text{Diketahui : } a = -7, \Rightarrow A = -2a = 14$$

$$b = 3, \Rightarrow B = -2b = -6$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = (-7)^2 + 3^2 - 5^2 = 49 + 9 - 25 = 33$$

Ditanyakan: Persamaan umum lingkaran?

Rencanakan:

Cari C dengan rumus: $C = a^2 + b^2 - r^2$

Monitoring :

$$C = a^2 + b^2 - r^2 = (-7)^2 + 3^2 - 5^2 = 49 + 9 - 25 = 33$$

Evaluasi:

Jadi, persamaan umum lingkaran yang berpusat di $(-7, 3)$ dengan jari-jari 5 adalah

$$L \equiv x^2 + y^2 + 14x - 6y + 33 = 0$$

Contoh 9

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Jawab

Prediksi:

$$\text{Diketahui: } A = -4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}A = 2$$

$$B = 6, \Rightarrow b = -\frac{1}{2}B = -3$$

$$C = -3$$

Rencanakan: Cari pusat dengan cara $M(a,b)$ atau $M\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$

Jari - jari lingkaran dengan cara $r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

$$\text{atau } r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Monitoring:

Dengan menggunakan rumus $M\left(-1/2A, -1/2B\right)$ pusat lingkaran adalah $(2, -3)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Jari - jari lingkaran } r &= \sqrt{1/4A^2 + 1/4B^2 - C} \\
 &= \sqrt{1/4(-4)^2 + 1/4(6)^2 - (-3)} \\
 &= \sqrt{4+9+3} \\
 r &= 4
 \end{aligned}$$

Evaluasi: Jadi, pusat $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ adalah $(-2, 3)$ dan jari-jari 4.

Cara lain:

Pusat $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ adalah $M(a,b) = (2,-3)$

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\
 r &= \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4} \cdot 6^2 - (-3)} \\
 r &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{1}{4} \cdot 36 + 3} = \sqrt{16} = 4
 \end{aligned}$$

Contoh 10

Apakah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi persamaan $10x^2 + 10y^2 - 30x + 40y - 4 = 0$ merupakan lingkaran?

Jawab

Persamaan $10x^2 + 10y^2 - 30x + 40y - 4 = 0$ dapat disederhanakan menjadi $x^2 + y^2 - 3x + 4y - \frac{4}{10} = 0$. Persamaan terakhir memenuhi bentuk umum persamaan lingkaran dengan $A = -3, B = 4$, dan $C = -\frac{4}{10}$.

Jadi, tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi persamaan di atas merupakan lingkaran.

Contoh 11

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(0, 4)$, $(1, -1)$, dan $(1, 3)$.

Jawab

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik tersebut adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Kita akan tentukan A , B , dan C .

$$(0,4) \text{ pada lingkaran, maka } 0^2 + 4^2 + 0.A + B.4 + C = 0 \\ 4B + C = -16 \dots (1)$$

$$(1,-1) \text{ pada lingkaran, maka } 1^2 + (-1)^2 + 1.A + B.(-1) + C = 0 \\ A - B + C = -2 \dots (2)$$

$$(1,3) \text{ pada lingkaran, maka } 1^2 + 3^2 + 1.A + B.3 + C = 0 \\ A + 3B + C = -10 \dots (3)$$

Gunakan metode eliminasi pada persamaan (2) dan (3).

Ingat:

Cara yang disajikan bukan satu-satunya cara untuk memperoleh persamaan lingkaran. Coba kamu tentukan caramu sendiri.

$$\begin{array}{r} A - B + C = -2 \\ A + 3B + C = -10 \\ \hline -4B = 8 \\ B = -2 \end{array}$$

Substitusikan $B = -2$ ke persamaan (1).

Diperoleh $4(-2) + C = -16 \Rightarrow C = -8$.

Substitusikan $B = -2$ dan $C = -8$ ke persamaan (2).

Diperoleh $A - (-2) + (-8) = -2 \Rightarrow A = 4$.

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui $(0, 4)$, $(1, -1)$, dan $(1, 3)$ adalah $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$.

Contoh 12

Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

- Tentukan nilai kuasa titik $A(1, 2)$, $B(6, 6)$, dan $C(8, 2)$.
- Kemudian tentukan posisi titik A , B , dan C terhadap lingkaran.

Jawab

- Titik $A(1, 2)$, nilai kuasanya
 $K_A(1, 2) = (1)^2 + (2)^2 - 4 \cdot (1) - 6 \cdot (2) - 12 = -23$
Titik $B(6, 6)$, nilai kuasanya
 $K_B(6, 6) = (6)^2 + (6)^2 - 4 \cdot (6) - 6 \cdot (6) - 12 = 0$
Titik $C(8, 2)$, nilai kuasanya
 $K_C(8, 2) = (8)^2 + (2)^2 - 4 \cdot (8) - 6 \cdot (2) - 12 = 12$
- Berdasarkan hasil perhitungan di **a**:
- $K_A(1, 2) < 0$, maka titik $A(1, 2)$ terletak di dalam lingkaran.
- $K_B(6, 6) = 0$, maka titik $B(6, 6)$ terletak pada lingkaran.
- $K_C(8, 2) > 0$, maka titik $C(8, 2)$ terletak di luar lingkaran.

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

- Bentuk umum persamaan lingkaran yang berpusat di $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$ adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.
- Posisi sembarang titik $R(k, l)$ pada lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah sebagai berikut.
 - Jika titik $R(k, l)$ terletak di dalam lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C < 0$
 - Jika titik $R(k, l)$ terletak pada lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C = 0$

- c. Jika titik $R(k, l)$ terletak di luar lingkaran, maka $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C > 0$
3. Nilai $k^2 + l^2 + Ak + Bl + C$ disebut *kuasa titik R terhadap lingkaran* dan dilambangkan K . Secara umum posisi titik $R(k, l)$ terhadap lingkaran dengan menggunakan lambang kuasa K adalah sebagai berikut.
- Jika titik $R(k, l)$ terletak di dalam lingkaran, maka $K < 0$.
 - Jika titik $R(k, l)$ terletak pada lingkaran, maka $K = 0$.
 - Jika titik $R(k, l)$ terletak di luar lingkaran, maka $K > 0$.

Latihan 3

- Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan berikut.
 - $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
 - $2x^2 + 2y^2 - 28x - 10y - 140 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 36 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
 - $x^2 - 8x + 6y + y^2 + 9 = 0$
- Tuliskan (dalam bentuk umum) persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, -2)$ dengan $r = 7$.
- Tentukan p supaya lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + 6y + 49 = 0$ menyinggung sumbu X (Petunjuk : tentukan nilai r supaya lingkaran menyinggung sumbu X).
- Tentukan m supaya titik $(-5, m)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$.
- Tentukan m supaya titik $(-5, m)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(1, 2)$, $(2, 1)$, dan $(1, 0)$.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(-3, 4)$ dan sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$.
8. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X dan sumbu Y , jika pusatnya terletak pada garis $5x - 4y = 3$.
9. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0$.
 - a. Tentukan kuasa masing-masing titik $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4, -2)$ dan $D(5, 3)$.
 - b. Kemudian tentukan posisi titik A, B, C , dan D terhadap lingkaran.
 - c. Gambarkan persamaan lingkaran dan kedudukan titik kuasanya.

1.6. Kedudukan Garis Terhadap Suatu Lingkaran

Setidaknya ada dua cara yang dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana kedudukan garis terhadap suatu lingkaran. Garis dapat menyinggung lingkaran, memotong lingkaran di dua titik, atau bahkan tidak menyentuh lingkaran (di luar lingkaran). Cara pertama akan memanfaatkan konsep (rumus) jarak antara dua garis, sedangkan cara kedua akan lebih memanfaatkan pengetahuan kita tentang aljabar (khususnya fungsi kuadrat).

Cara I

Kita akan menentukan kedudukan garis $g \equiv ax + by + c = 0$ terhadap lingkaran L dengan pusat M dan jari-jari $r = MP$.

Ingat:

Jarak antara titik pusat lingkaran $M(x_1, y_1)$ dengan sembarang garis $g \equiv ax + by + c = 0$ adalah:

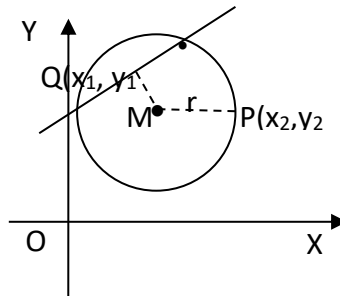
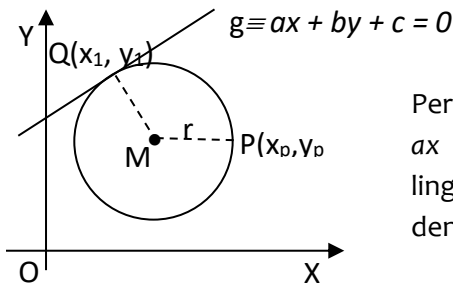
$$d = \left(\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

(1) Garis yang memotong lingkaran

$$g \equiv ax + by + c = 0$$

Perhatikan Gambar 4.5. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ memotong lingkaran yang berpusat di M dengan

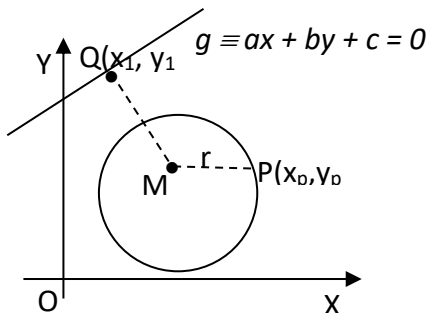
jari-jari MP jika $MQ < MP$.

**(2) Garis yang menyinggung lingkaran**

Perhatikan Gambar 4.6. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ menyinggung lingkaran yang berpusat di M dengan jari-jari MP jika $MQ = MP$

(3) Garis di luar lingkaran

Perhatikan Gambar 4.7. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ di luar lingkaran yang berpusat di M dengan jari-jari MP jika $MQ > MP$.



jari-jari MP diperoleh dari persamaan lingkaran, sementara MQ diperoleh dengan menggunakan rumus jarak antara titik $M(x_0, y_0)$ dengan garis $g \equiv ax + by + c = 0$.

Contoh 13

Tentukan kedudukan garis $g \equiv 3x - 4y + 5 = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Jawab

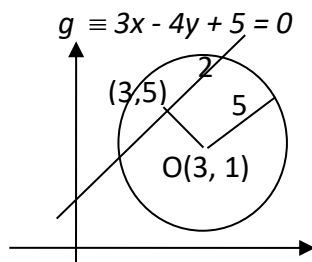
Prediksi:

Diketahui: Lingkaran L berpusat di $M(3, 1)$ dengan jari-jari $r = 5$.

Misalkan garis $g \equiv px - qy + 5 = 0$

$a = 3, b = 1, p = 3, q = -4$ dan $c = 5$

Ditanyakan: Kedudukan garis g terhadap lingkaran L?



Rencanakan:

Jarak antara pusat $M(3,1)$ dan garis g dihitung dengan cara:

$$d = \left| \frac{pa + qb + c}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|$$

Monitoring:

Dengan menggunakan rumus $\backslash$, jarak antara pusat $M(3, 1)$

dengan garis g adalah $d = \left| \frac{3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = 2$

Evaluasi:

Karena $d < r$, maka garis g memotong lingkaran L di dua titik. Perhatikan gambar di atas.

Apakah ada cara lain?

Ingat:

Diskriminan dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $D = b^2 - 4ac$

Cara II

Kedudukan garis $g \equiv y = mx + n$ terhadap lingkaran

$L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dapat kita ketahui dengan mensubstitusikan persamaan garis g ke lingkaran L .

$$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 + Ax + Bmx + Bn + C = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mn + A + Bm)x + (n^2 + Bn + C) = 0$$

Persamaan terakhir adalah persamaan kuadrat dengan tiga kemungkinan diskriminan D .

- (1) $D > 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real, misalkan x_1 dan x_2 . Jika x_1 dan x_2 disubstitusikan ke persamaan garis g maka diperoleh y_1 dan y_2 . Dengan demikian (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) merupakan dua titik potong lingkaran L dengan garis g .

$\therefore$ Jika $D > 0$, garis memotong lingkaran di dua titik.

- (2) $D = 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai satu akar real, misalkan x_1 . Jika x_1 disubstitusikan ke persamaan garis g , maka diperoleh y_1 . Dengan demikian (x_1, y_1) satu-satunya titik potong

antara garis g dengan lingkaran L . Artinya garis g hanya menyinggung lingkaran L .

$\therefore$ Jika $D = 0$, maka garis menyinggung lingkaran.

- (3) $D < 0$, maka persamaan kuadrat tidak memiliki solusi. Artinya garis g tidak berpotongan dengan lingkaran L .

$\therefore$ Jika $D < 0$, maka garis di luar lingkaran.

Jika kita perhatikan, cara II sedikit lebih panjang dari-cara I. Namun cara II mempunyai kelebihan, yaitu dapat sekaligus menentukan titik-titik di mana garis g dan lingkaran L berpotongan, atau bersinggungan, sementara cara I tidak bisa.

Contoh 14

Tentukan titik potong garis $y = 3x + 3$ terhadap lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$.

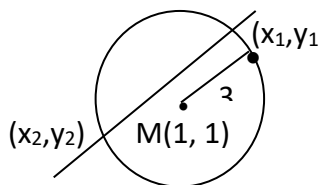
Jawab

Prediksi: Diketahui: pusat $M(1,1)$

Ditanyakan: Titik potong garis terhadap lingkaran?

Rencanakan:

Substitusikan persamaan garis $y = 3x + 3$ ke dalam persamaan lingkaran



Monitoring: Diperoleh:

$$x^2 + (3x + 3)^2 - 2x - 2(3x + 3) = 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x^2 + 18x + 9 - 2x - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{atau} \quad x_2 = -1$$

Untuk $x_1 = 0$, diperoleh $y_1 = 3$.

Untuk $x_2 = -1$, diperoleh $y_2 = 0$.

Evaluasi: Jadi, titik potong garis $y = 3x + 3$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ adalah $(0, 3)$ dan $(-1, 0)$

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

1. Kedudukan garis $g \equiv ax + by + c = 0$ terhadap lingkaran L dengan pusat M dan jari-jari $r = MP$ adalah sebagai berikut.
 - a. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ memotong lingkaran yang berpusat di M dengan jari-jari $r = MP$ jika $MQ < MP$ (MQ adalah jarak pusat lingkaran dengan garis g).
 - b. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ menyinggung lingkaran yang berpusat di M dengan jari-jari $r = MP$ jika $MQ = MP$ (MQ adalah jarak pusat lingkaran dengan garis g).
 - c. Garis $g \equiv ax + by + c = 0$ di luar lingkaran yang berpusat di M dengan jari-jari $r = MP$ jika $MQ > MP$ (MQ adalah jarak pusat lingkaran dengan garis g).
2. Kedudukan garis $g \equiv y = mx + n$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dapat kita ketahui dengan mensubstitusikan persamaan garis g ke lingkaran L , sehingga diperoleh bentuk persamaan kuadrat. Jika D adalah diskriminan persamaan kuadrat, maka kedudukan garis g terhadap lingkaran L adalah sebagai berikut.
 - a. Jika $D > 0$, garis memotong lingkaran di dua titik.
 - b. Jika $D = 0$, garis menyinggung lingkaran (memotong lingkaran di satu titik). Jika $D < 0$, garis di luar lingkaran.

Latihan 4

1. Tentukan kedudukan garis terhadap lingkaran berikut.
 - a. $g \equiv x + y = 4$
 $L \equiv x^2 + y^2 = 3$
 - b. $g \equiv 5x + 10 - y = 0$
 $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 16y = 3$
 - c. $g \equiv x + y = 6$
 $L \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
2. Tentukan titik potong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y = 12$ dengan
 - a. sumbu X,
 - b. sumbu Y,
 - c. garis $y = x$.
3. Tunjukkan bahwa garis $x + 9 = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 81$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 153 = 0$.
Tentukan pula koordinat titik-titik singgungnya.
4. Misalkan garis $-3x - y = 10$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ di titik P dan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$ di titik Q.
Tentukan panjang garis PQ.
5. Sebuah lingkaran berpusat di kuadran I. Jari-jarinya r dan menyinggung sumbu Y di $(0, 3)$.
 - a. Tunjukkan bahwa persamaan lingkaran tersebut adalah $(x - r)^2 + (y - 3)^2 = r^2$.
 - b. Tentukan r , bila lingkaran itu melalui titik $(2, 7)$.
 - c. Tentukan persamaan lingkaran tersebut.
 - d. Tentukan panjang tali busur lingkaran sepanjang sumbu X.

2. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

2.1 Garis singgung pada lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari r

Ingat:

Persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (a, b) adalah
 $y - b = m(x - a)$

Persamaan garis singgung di titik

(x_1, y_1) dengan gradien $m = -\frac{x_1}{y_1}$

adalah

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

Contoh 15

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ di titik $(2, -3)$.

Jawab**Prediksi:**

Diketahui: titik $(2, -3)$ $x_1 = 2, y_1 = -3$, terletak pada $L = x^2 + y^2 = 13$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Rumus persamaan garis singgung lingkaran berpusat pada $O(0,0)$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$

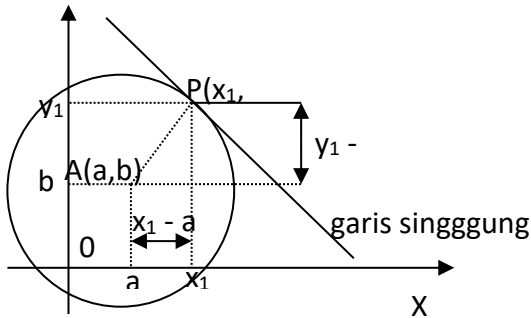
Monitoring:

Persamaan garis singgung di titik $(x_1, y_1) = (2, -3)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ adalah $x(2) + y(-3) = 13$ atau $2x - 3y = 13$.

Evaluasi:

Jadi persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ di titik $(2, -3)$ adalah $2x - 3y = 13$.

2.2 Garis Singgung pada Lingkaran yang berpusat di M (a,b) dan jari-jari r



Perhatikan Gambar 4.9. Untuk

menentukan persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ kita perlu menemukan gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$.

Misalkan gradien $MP = m_{mp}$, dan gradien garis singgung m_{gs} .

$m_{mp} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$, karena $MP \perp$ garis singgung, maka

$$m_{mp} \cdot m_{gs} = -1$$

$$\frac{y_1 - b}{x_1 - a} \cdot m_{gs} = -1$$

$$m_{gs} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien

$$-\frac{x_1 - a}{y_1 - b} \text{ adalah}$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

Ingat:

$$y - y_1 = m_{gs} (x - x_1)$$

Catatan:

Bentuk persamaan garis singgung:

1. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada L berpusat di $M(a, b)$
2. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada L berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r
3. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada L:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ adalah $(y - y_1)(y_1 - b) = -(x - x_1)(x_1 - a)$.

Kita bisa memperoleh bentuk lain dari persamaan garis singgung di atas dengan sedikit uraian dan manipulasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & (y - y_1)(y_1 - b) = -(x - x_1)(x_1 - a) \\ \Leftrightarrow & yy_1 - by - y_1^2 + by_1 + xx_1 - ax - x_1^2 + ax_1 = 0 \dots \\ \Leftrightarrow & yy_1 - by - y_1^2 + by_1 + xx_1 - ax - x_1^2 + ax_1 + \underbrace{((x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2)}_{r^2} = r^2 \\ \Leftrightarrow & (yy_1 - by - y_1^2 + by_1 + b^2 - 2by_1 + y_1^2) + (xx_1 - ax - x_1^2 + ax_1a^2 - 2ax_1 + x_1^2) = r^2 \\ \Leftrightarrow & (yy_1 - by_1 - by + b^2) + (xx_1 - ax_1 - ax + a^2) = r^2 \\ \Leftrightarrow & (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2 \end{aligned}$$

Catatan:

Jika $a=0$ dan $b=0$ maka lingkarannya berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r dan persamaan garis singgungnya

Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Bentuk lain dari persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r dapat diperoleh dengan penguraian lebih lanjut sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2 \\ \Leftrightarrow & xx - ax_1 - ax + a^2 + yy_1 - by_1 - by + b^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow & xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) + (a^2 + b^2 - r^2) = 0 \end{aligned}$$

$$xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Rumus terakhir ini digunakan untuk menentukan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Jembatan keledai (mnemonik):

$$\begin{aligned} \text{Persamaan lingkaran } L &\equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ &\equiv (x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = r^2 \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

$$\text{Persamaan lingkaran } L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$\equiv x.x + y.y + \frac{1}{2}A(x + x) + \frac{1}{2}B(y + y) + C = 0$$

Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah

$$x.x_1 + y.y_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Contoh 16

Tentukan persamaan garis singgung di titik $(1, -2)$ pada lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Jawab

Prediksi:

Diketahui titik $(x_1, y_1) = (1, -2)$ terletak pada lingkaran

$$L \equiv (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ karena}$$

$$(1-1)^2 + (-2+3)^2 = 25.$$

$$r = 25, \text{ pusat } (a,b) = (1,-3)$$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan: Persamaan garis singgung dihitung dengan dengan rumus: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$

Monitoring: Dengan rumus

$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$ diperoleh persamaan garis singgung di titik $(1, -2)$ adalah

$$(x-1)(1-1) + (y-3)(-2-3) = 25$$

$$-5y + 15 = 25$$

$$y = -2$$

Evaluasi:

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = -2$.

Contoh 17

Tentukan persamaan garis singgung di titik $(4, -1)$ pada lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$$

Jawab

Prediksi:

Diketahui: titik $(x_1, y_1) = (4, -1)$ pada lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0 \text{ karena } 16 + 1 + 24 + 4 - 45 = 0.$$

Pusat $(a,b) = (-3,2)$ dan $C = -45$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Persamaan garis singgung dihitung dengan rumus:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + \frac{1}{2} A(x + x_1) + \frac{1}{2} B(y + y_1) + C = 0$$

Monitoring:

Dengan rumus $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + \frac{1}{2} A(x + x_1) + \frac{1}{2} B(y + y_1) + C = 0$ diperoleh persamaan garis singgung $(4)x + y(-1) + 3(x + 4) - 2(y - 1) - 45 = 0$
 $7x - 3y - 35 = 0$

Evaluasi:

Jadi, persamaan garis singgung di titik $(4, -1)$ pada lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0 \text{ adalah } 7x - 3y - 35 = 0.$$

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

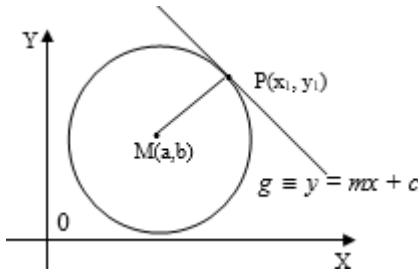
1. Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.
2. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ adalah $(y - y_1)(y_1 - b) = -(x - x_1)(x_1 - a)$.
3. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r adalah $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$.
4. Bentuk lain dari persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran yang berpusat di $M(a, b)$ dengan jari-jari r adalah $xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2} A(x + x_1) + \frac{1}{2} B(y + y_1) + C = 0$.

Latihan 5

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran berikut.
 - a. $x^2 + y^2 = 8$ di titik $(2, 2)$.
 - b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$ di titik $(4, 1)$.
 - c. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 4x - 6y - 27 = 0$ di titik $(4, -5)$.
2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran :
 - a. $x^2 + y^2 = 10$ di titik yang berordinat 1.
 - b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsis 2.
 - c. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$ di titik yang berordinat 4.
3. Lingkaran L melalui titik $(1, 2)$, $(2, 1)$, dan $(1, 0)$. Tentukan persamaan garis singgung di titik $(2, 1)$ pada lingkaran L.
4. Lingkaran L berpusat di $(3, -5)$ dengan jari-jari 5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran L di titik yang berordinat -1 .
5. Lingkaran L berpusat di $(-5, 6)$ dan menyinggung sumbu X. Tentukan persamaan garis singgung di titik yang berabsis 1.
6.
 - a. Tentukan titik potong garis $y = 5x + 10$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 164$.
 - b. Tentukan persamaan garis-garis singgung di titik – titik potong tersebut.
 - c. Tentukan pula titik potong kedua garis singgung tersebut.
7. Tunjukkan bahwa titik $P(-4, 1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 19 = 0$ dan tentukan persamaan garis singgung di titik P.
8.
 - a. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$. Jelaskan mengapa lingkaran tersebut melalui $O(0, 0)$?
 - b. Selain melalui titik $O(0, 0)$, lingkaran itu melalui titik A pada sumbu X. Tentukan koordinat A.
 - c. Tentukan persamaan garis singgung di titik $O(0, 0)$ dan A.

- d. Tentukan koordinat titik B yang merupakan titik potong kedua garis singgung tersebut dan tunjukkan bahwa $OB=AB$

2.3. Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu



Menentukan persamaan garis singgung yang bergradien m pada lingkaran $L(M)$ adalah sama dengan mencari nilai c sehingga persamaan garis $y = mx + c$ menyinggung lingkaran L . Jadi, secara teori, jika nilai c diperoleh, maka $y = mx + c$ adalah garis singgung pada lingkaran dengan gradien m . Kita tentukan nilai c sebagai berikut.

Persamaan garis $g \equiv y = mx + c$ (1)

Persamaan lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (2)

Substitusikan (1) ke (2), diperoleh:

$$(x - a)^2 + ((mx + c) - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + (mx + c)^2 - 2b(mx + c) + b^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - 2mbx - 2bc + b^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (2mc - 2a - 2mb)x + (a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - r^2) = 0 \quad \dots (3)$$

Karena garis g menyinggung lingkaran L , maka diskriminan persamaan kuadrat (3) sama dengan nol.

$$D = (2mc - 2mb - 2a)^2 - 4(1 + m^2)(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m(c - b) - a)^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - r^2 + m^2a^2 + m^2b^2 + m^2c^2 - 2m^2bc - m^2r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2c^2 - 2m^2bc + m^2b^2 - 2mac + 2mab + a^2) - (a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - r^2 + m^2a^2 + m^2b^2 + m^2c^2 - 2m^2bc - m^2r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-b - m^2a^2 + 2mab) + (-2mac - c^2 + 2bc) + (r^2 + m^2r^2) = 0$$

Ingat:

Diskriminan PK:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

adalah

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow r^2(1+m^2) = (b^2 + m^2a^2 - 2mab) + (c^2 + 2mac - 2bc)$$

$$\Leftrightarrow r^2(1+m^2) = (b-ma)^2 + (c^2 + 2mac - 2bc)$$

$$\Leftrightarrow r^2(1+m^2) = \{c-(b-ma)\}^2$$

$$\Leftrightarrow \pm \sqrt{r^2(1+m^2)} = c-(b-ma)$$

$$\Leftrightarrow c = b-ma \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Substitusikan c ke (1), maka $y = mx + b - ma \pm r\sqrt{1+m^2}$

$$\Leftrightarrow y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Catatan :

Jika $a=0$ dan $b=0$ maka lingkaran L berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r , sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Persamaan garis singgung bergradien m pada lingkaran L yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r adalah

$$y - b = m(x - a) + r\sqrt{1+m^2} \text{ atau}$$

$$y - b = m(x - a) - r\sqrt{1+m^2}$$

Contoh 18

Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus garis $g \equiv x - 3y - 6 = 0$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

Jawab

Prediksi:

Diketahui: lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$ berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari $r = 5$. Garis $g \equiv x - 3y - 6 = 0$ gradien $m_g = \frac{1}{3}$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Gradien garis singgung (m_{gs}) yang tegak lurus pada garis lurus g , dihitung dengan rumus cara: $m_{gs} = \frac{-1}{m_g}$.

Persamaan garis singgung dihitung dengan rumus:

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Monitoring:

Dengan rumus $m_{gs} = \frac{-1}{m_g}$. Karena $m_g = \frac{1}{3}$, maka $m_{gs} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

Dengan rumus: $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$, diperoleh

$$y = -3x \pm 5\sqrt{1 + 3^2} = -3x \pm 5\sqrt{10}.$$

Evaluasi:

Jadi, persamaan garis singgung yang tegak lurus garis

$$g \equiv x - 3y - 6 = 0$$

pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah

$$y = -3x + 5\sqrt{10} \quad \text{atau} \quad y = -3x - 5\sqrt{10}.$$

Contoh 19

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ yang membentuk sudut 60° terhadap sumbu X .

Jawab

Prediksi:

Diketahui $L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$,

$A = 2$ atau $a = -1$, $B = 4$ atau $b = -2$, dan $C = -4$

Pusat: $(-1, -2)$, dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{4}4^2 - (-4)} = 3$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Cari m_{gs} dengan $\tan 60^\circ$, dan persamaan garis singgung dengan

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Monitoring:

Gradien garis singgung $m_{gs} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Persamaan garis singgung: $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

$$y + 2 = \sqrt{3} \pm 3\sqrt{1 + 3}$$

$$y = \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 2) \pm 6$$

Evaluasi:

Jadi persamaan garis singgung pada lingkaran

$L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$, yang sejajar dengan garis

$5x - 12y + 15 = 0$ adalah: $y = \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 2) + 6$ atau

$$y = \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 2) - 6$$

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

1. Persamaan garis singgung bergradien m pada lingkaran L yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r adalah $y - b = m(x - a) + r\sqrt{1 + m^2}$ atau $y - b = m(x - a) - r\sqrt{1 + m^2}$

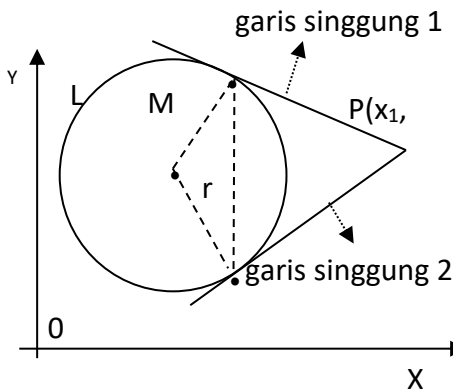
2. Persamaan garis singgung bergradien m pada lingkaran L yang berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$.

Latihan 6

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran:
 - a. $x^2 + y^2 = 10$ dengan gradien -3 .
 - b. $x^2 + y^2 = 25$ yang membentuk sudut $\frac{\pi}{6}$ dengan sumbu X positif.
 - c. $x^2 - y^2 = 9$ yang sejajar dengan garis $x+y+2=0$.
 - d. $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x+y=3$.
2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran:
 - a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ yang sejajar garis $5x - 12y + 15 = 0$.
 - b. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ yang melalui pusat koordinat.
 - c. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 6 = 0$.
 - d. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 15 = 0$ yang bersudut $\frac{\pi}{3}$ dengan sumbu X positif.
3. Diketahui lingkaran yang melalui titik $(1,1)$, $(2,4)$, dan $(5, 3)$. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran L yang sejajar sumbu X .
4. Diketahui persamaan lingkaran L jari 2 dar. sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran L yang membentuk sudut $\frac{3}{4}\pi$ dengan sumbu X positif.

- a. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(-2, 4)$ dan $(7, 7)$. dan pusat terletak pada garis $x + y = 7$.
 - b. Tentukan persamaan garis singgung di titik $(7, 7)$ pada lingkaran itu.
 - c. Tentukan persamaan garis sinbgung pada lingkaran yang sejajar dengan garis $x - 2y + 1 = 0$.
6. a. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(-5, -6)$ dan $(8, -4)$ dan pusatnya terletak pada sumbu X.
 - b. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran tersebut yang tegak lurus garis $2x - y + 6 = 0$.

2.4. Garis Singgung dari Suatu Titik di Luar Lingkaran



Perhatikan Gambar 4.11. Kita akan mencari garis yang menyinggung lingkaran $L(M)$ dan melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran $L(M)$.

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$. Masalahnya sekarang adalah mencari nilai m yang memenuhi.

Menentukan nilai m dapat kita lakukan dengan cara berikut.

Persamaan garis singgung bergradien m pada lingkaran L yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r adalah

$$g \equiv y - b = m(x - a) \pm r \sqrt{1 + m^2}.$$

Titik $P(x_1, y_1)$ dilalui oleh garis g , maka

$$y_1 - b = m(x_1 - a) \pm r \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - b) - m(x_1 - a) = \pm r \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow ((y_1 - b) - m(x_1 - a))^2 = (\pm r \sqrt{1 + m^2})^2$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - b)^2 + m^2(x_1 - a)^2 - 2(y_1 - b)(x_1 - a)m = r^2 + r^2m^2$$

$$\Leftrightarrow ((x_1 - a)^2 - r^2)m^2 - 2(y_1 - b)(x_1 - a)m + ((y_1 - b)^2 - r^2) = 0 \dots (1)$$

Persamaan terakhir ini adalah persamaan kuadrat dengan variabel m . Akar-akar persamaan kuadrat (1) adalah:

$$m = \frac{2(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2(x_1 - a)^2 - 4((x_1 - a)^2 - r^2)((y_1 - b)^2 - r^2)}}{2((x_1 - a)^2 - r^2)}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai m ke persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$, maka kita memperoleh persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (x_1, y_1) .

Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a, b) , jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Selain cara di atas, masih ada beberapa cara yang lain untuk menyelesaikan masalah ini, silahkan mencoba!

Contoh 20

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang melalui titik $(0, 2)$.

Jawab

Prediksi:

Diketahui: Lingkaran $x^2 + y^2 = 1$

Pusat (0,0), melalui titik $(x, y) = (0, 2)$

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Hitung gradien garis singgung pada lingkaran berpusat di (a, b) dengan jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) dengan rumus

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Hitung persamaan garis singgung dengan rumus:

$$y - b = \pm m(x - a)$$

Monitoring:

Dengan rumus di atas diperoleh

$$m = \frac{(2 - 0)(0 - 0) \pm 1\sqrt{4(2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 - 1^2}}{(0 - 0)^2 - 1^2}$$

$$\text{dan } y - 2 = \pm \sqrt{3}(x - 0)$$

$$y = 2 \pm x\sqrt{3}$$

Evaluasi:

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang melalui $(0, 2)$ adalah $y = +x\sqrt{3} + 2$ atau $y = -x\sqrt{3} + 2$

Cara lain:

Misalkan garis yang melalui titik $(0, 2)$ menyinggung lingkaran di titik (x_1, y_1) , maka garis singgung pada lingkaran di titik (x_1, y_1) adalah

$xx_1 + yy_1 = r^2 = 1$. karena titik $(0, 2)$ dilalui garis singgung lingkaran,

$$\text{maka } 0 \cdot x_1 + 2 \cdot y_1 = 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2}$$

Karena (x_1, y_1) terletak pada lingkaran maka berlaku $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

$$y_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sehingga $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ dan $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ adalah titik singgung pada lingkaran yang garis singgungnya melalui titik $(0, 2)$.

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran yang melalui titik $(0, 2)$ adalah

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y = 1 \text{ atau } -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2 \text{ atau } y = \sqrt{3}x + 2$$

Perhatikan bahwa cara 2 sekaligus menemukan titik singgungnya pada lingkaran.

Cara lain:

Persamaan garis singgung dengan gradien m yang melalui $(0, 2)$ adalah $y = mx + 2$.

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$, dengan gradien

m adalah $y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}$

$$mx + 2 = mx \pm \sqrt{1 + m^2}$$

$$2 = \pm \sqrt{1 + m^2}$$

$$4 = 1 + m^2$$

$$m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{3}$$

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien $m = \pm \sqrt{3}$ pada

Lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ adalah $y = \pm \sqrt{3}x + 2$

Contoh 21

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ yang melalui titik $O(0,0)$

Jawab

Prediksi:

Diketahui: Pusat lingkaran $(2,2)$ dengan $r = 1$.

Ditanyakan: Persamaan garis singgung?

Rencanakan:

Gradien garis singgungnya dihitung dengan rumus

$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}$$

Persamaan garis singgungnya dihitung dengan rumus:

$$y - b = m(x - a)$$

Monitoring:

Gradien garis singgungnya diperoleh

$$\begin{aligned} m &= \frac{(0 - 2)(0 - 2) \pm 1\sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 - 1^2}}{(0 - 2)^2 - 1^2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} = \frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7} \end{aligned}$$

Persamaan garis singgungnya diperoleh

$$y - 0 = \left(\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7} \right)(x - 0) \text{ atau } y = \left(\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7} \right)x.$$

Evaluasi:

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ yang melalui titik $(0,0)$ adalah

$$y = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \right)x. \quad \text{atau} \quad y = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \right)x.$$

Cara lain dapat dicoba sendiri!

Rangkuman (Kerangka Garis Besar)

1. Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a, b) , jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan
$$m = \frac{(y_1 - b)(x_1 - a) \pm \sqrt{2^2(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 - r^2}}{(x_1 - a)^2 - r^2}.$$
2. Cara lain mencari persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a, b) , jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) adalah dengan terlebih dahulu mencari titik singgungnya kemudian menggunakan rumus persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r di titik singgung.
3. Cara lainnya lagi mencari persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a, b) , jari-jari r dan melalui titik (x_1, y_1) adalah dengan terlebih dahulu mencari gradien garis singgungnya (m) kemudian menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran yang berpusat di (a, b) dan jari-jari r .

Latihan 7

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran:
 - a. $x^2 + y^2 = 9$ yang melalui titik $(0, 5)$
 - b. $x^2 + y^2 = 10$ yang melalui titik $(-3, 2)$
 - c. $x^2 + y^2 = 1$ yang melalui titik $(0, 2)$
 - d. $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(7, 1)$

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran:
 - a. $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ yang melalui titik $(0,-4)$
 - b. $x^2+y^2-20y+60=0$ yang melalui titik $(-3,-1)$
 - c. $x^2+y^2-8x-4y+4=0$ yang melalui titik $(-3,4)$
 - d. $x^2+y^2+4x-8y=20$ yang melalui titik $(-1,-3)$
3. Tentukan titik –titik singgung garis singgung pada no. 1.
4. Tentukan titik-titik singgung garis singgung pada no.2

DAFTAR PUSTAKA

- Abidin, Y. 2015. *Pebelajaran Multiliterasi*. Bandung: Refika Aditama
- Anathime. 2009. *Keterampilan Metakognitif*. [online]. Tersedia: <http://biologyeducationresearch.blogspot.com/2009/12/keterampilan-metakognitif.html>
- Anderson, O.W. & Krathwohl, D.R. 2001. *A Taxonomy For Learning, Teaching, and Assessing (A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives)*. New York: Addison Wesley Longman, Inc.
- Arends, Richar I. 2008. *Learning to Teach (Belajar untuk Belajar)*. (Penerjemah: Helly Prajitno Soetjipto). Edisi ketujuh, buku satu. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- . 2008. *Learning to Teach (Belajar untuk Belajar)*. (Penerjemah: Helly Prajitno Soetjipto). Edisi ketujuh, buku dua. Yogyakarta: Pustaka Pelajar
- Barret, Terry. 2005. *Understanding Problem Based Learning*. (online). Tersedia: <http://www.aishe.org/readings/2005-2/chapter2.pdf>

- Bell, Frederick H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics: In Secondary Schools*. Second Printing. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown. Company.
- Branca, 1980. *Problem Solving as a Goal, Process, and Basic Skill. Problem Solving in School Mathematics*. Editor: Krulik, S. and Reys, R.E. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Budiningsih, Asri. 2012. *Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta
- Cahyo. 2013. *Panduan Aplikasi Teori-Teori Belajar Mengajar*. Jogjakarta: DIVA Press.
- Collins, Norma Decker. 1994. *Metacognition and Reading To Learn*. New York: ERIC Clearinghouse on Information Resources Syracuse NY.
- Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. 1975. *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston : Houghton Mifflin Company.
- Copley, J. V. 2000. *The young child and mathematics*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Corebima, A.D. 2006. *Pembelajaran Biologi yang Memberdayakan Kemampuan Berpikir Siswa*. Makalah disajikan dalam Pelatihan Strategi Metakognitif pada pembelajaran biologi untuk guru-guru biologi SMA di Kota Palangkaraya. https://scholar.google.co.id/scholar?q=related:wRJsaPwXCbUJ:scholar.google.com/&hl=en&as_sdt=0,5
- Corebima, A.D. 2007. *Learning Strategies Having Bigger Potency To Empower Thinking Skill And Concept Gaining of Lower*

Academic Student. *Proceeding of Redesigning Pedagogy Conference*, Nanyang, May 28-30-2007. *European Journal of Education Studens*. Vol. 2. Issue 5. 2016.

-----, 2007. *Hubungan Keterampilan Metakognitif T Terhadap Hasil Belajar Biologi dan RRetensi Siswa Kelas X dengan Penerapan Sttrategi Pemberdayaan Berpikir Melalui Pertanyaan (PBMP) di SMAN 9 Malang* . *Jurnal On-line. Pendidikan Hayati*. Universitas Negeri Malang. Vol.1, No.1 (2013).

Coutinho, A.S. 2007. *Educate~ Vol.7, Issue.1, 2007, pp. 39-47. (Online). The Relati onship Between Goals, Metacognition, And Academic Success*. Tersedia pada: <http://www.educatejournal.org/>.

Dahar, R.W. 2011. *Teori-Teori Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Degeng, S. Nyoman. 2008. *Taksonomi Variabel Pembelajaran (Power Point)*. Malang: Universitas Negeri Malang.

Depdiknas. 2003. *Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional*. Jakarta: Depdiknas RI.

Depdiknas.2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi*. Jakarta: Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah

Depdiknas. 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP)*. Jakarta: Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional

Depdiknas. 2007. *Standar Isi Untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta:Dirjen Dikti Depdiknas

Depdiknas. 2008. *Permendiknas No. 22 Tahun 2006 tentang Tujuan Pembelajaran Matematika*. Jakarta: Depdiknas

Depdiknas.2013. *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 65 Tahun 2013 Tentang Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah

Desoete, A. 2001. *Off-Line Metacognitionin Children with Mathematics Learning Disabilities. Faculteit Psychologiesen Pedagogische Wetenschappen. Universiteit-Gent.*
<http://tip.psychology.org/meta.html>

Dindin Abdullah, M.L. 2007. *Pembelajaran Berbasis Masalah*. [online]. Tersedia: <https://>

Djaali dan Puji Mulijono. 2004. *Pengukuran dalam Bidang Pendidikan*. Jakarta: Intramedia.

Eggen, P.D and Kauchak, D.P. 1996. *Strategies for Teachers. Teaching Content and Thinking Skill. (Third Edition)*. Boston: Allyn and Bacon.

Eriawati. 2013. *Aplikasi Keterampilan Metakognitif dalam Pembelajaran Ekosistem di MAN Rukoh*. Journal Blotik, ISSN. 2337-9812, Vol. 1, No.1,Ed April 2013, Hal 1-66.

Fauzi, M. A. 2013. *Peranan Kemampuan Metakognitif dalam Pemecahan Masalah Matematika Sekolah Dasar*. Artikel. Tersedia pada:

<http://digilib.unimed.ac.id/public/UNIMED-Article-30901-Artikel%20Metakognitif.pdf>. Diakses 12 Januari 2015.

Flavell, J. H., 1976. *Metacognitive aspects of problem solving*. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

<http://tip.psychology.org/meta.html>.

Flavell, J. H. 1979. *Metacognition and Cognitive Monitoring: A New are of Cognitive-Developmental Inquiry*. *American Psychologist*. Oktober 1979. Vol. 34. No. 10. 906-911. <http://www.homestead.com/>

Fung, M.G. dan Roland, L. 2004. *Writing, Reading, and Assessing in an Elementary Problem Solving Class*. In *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*: Desember 2004. ProQuest Educatio Journals

Gagne, Robert M. 1975. *Prinsip-Prinsip Belajar untuk Pengajaran (Essential of Learning for Instruction)*. (Terjemahan oleh Hanafi & Manan tahun 1988). Surabaya: Usaha Nasional.

Gama, Claudia Amado. 2004. *Integrating Metacognition Instruction in Interactive Learning Environments*. Submitted for the degree of D. Phil. http://www.dcc.utba.br/~clauding/thesis/index_Gama.pdf.

Hacker, Douglas J. dkk. 2009. *Handbook of Metacognition in Educaation*. New York: Madison Avtion. New York: Madison Ave.

Hadi, S. (2000). *Teori Matematika Realistik*. The Second Tryout of R ME-based INSET 2000. University of Twente Enschede, the Netherlands. Tidak dit erbitkan.

- dan Fauzan, A. (2003). *Mengapa PMRI?* Dalam Buletin PMRI (Pendidikan Matematika Realistik Indonesia) edisi I, Juni 2003.
- , 2007. *Pengaruh Strategi Pembelajaran Cooperative Script terhadap Keterampilan Berpikir Kritis, Keterampilan Metakognitif, dan kemampuan Kognitif Biologi pada Peserta didik SMA Laboratorium Universitas Negeri Malang*. Tesis Tidak Dipublikasikan. Malang: PPs Universitas Negeri Malang.
- Hendy, Hermawan. 2006. *Model-Model Pembelajaran Inovatif*. Jakarta: CV. Cipta Praya.
- Hill, F. Wilfred. 2009. *Teori-Teori Pembelajaran*. Bandung: Nusa Media
- Hudoyo, Herman. 1990. *Matematika dan Pelaksanaanya di Depan Kelas*. Jakarta: Depdikbud.
- Holmes, Emma E. 1995. *New Direction in Elementary School Mathematics. Interactive Teaching and Learning*. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- Huitt, William G. 1997. *Metacognition*. Available: <http://tip.psychology.org/meta.html>.
- I Gusti Putu Suharta. 2002. "Matematika Realistik, Apa dan Bagaimana". Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan Badan Penelitian dan Pengembangan Departemen Nasional Jakarta (Nomor 038 tahun ke-8). Hlm 641-652.
- Ilham Minggu, 2005. *Pengembangan Assesmen Autentik dalam Pembelajaran Matematika pada Sekolah Menengah*

- Pertama. Laporan Penelitian. Makassar: Lemlit UNM Makassar.
- Imel, S. 2002. *Metacognitive Skills for Adult Learning*, (Online), (<http://www.ce-te.org/acve/docs/tia00107.pdf>).
- Isjono. 2007. *Cooperative Learning*. Bandung: Alfabeta.
- Jaeng, Maxinus. 2005. *Model Pembelajaran Matematika sekolah dengan Cara Perseorangan dan Kelompok Kecil (Model PPKK)*. Disertasi tidak diterbitkan. Program Pascasarjana UNESA Surabaya.
- Jamaris, Martini. 2013. *Orientasi Baru dalam Psikologi Pendidikan*. Bogor: Gahalia Indonesia.
- Joyce, B., Marsha Weil., Emily Calhoun, 2011. *Models of Teaching (Model-Model Pengajaran)*. (Diterjemahkan oleh: Ahmad Fawaid & Ateilla Mirza). (Edisi ke delapan). Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Kholil Fatkhul Mu'minin, Siti dan Utiya Azisah. 2014. *Keterampilan Metakognitif Siswa Melalui Model Pembelajaran Inkuiri pada Materi Asam Basa di SMAN Pacet Kelas XI*. Surabaya: UNESA. *Journal of Chemical Education* Vol. 3, No. 02, pp. 67-74, May 2014.
- Khabibah, Sitti. 2006. *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika dengan Soal Terbuka untuk Meningkatkan Kreativitas Siswa Sekolah Dasar*. Disertasi tidak diterbitkan. Program Pascasarjana UNESA. Surabaya.
- Killen, R. 1998. *Effective Teaching Strategies. Lessons from Research and Practice*. Second Edition. Australia: Social Science Press.

- Liu, Min. 2005. *Motivating Students Thorough Problem Based Learning*. University of Texas: Austin. (online). Tersedia: [https:// https://](https://https://)
- Livingston, J.A. 1997. *Metacognition: An Overview*; available: [http:// www.qse.buffalo.edu/fas/schuell/cep564/metacog.htm](http://www.qse.buffalo.edu/fas/schuell/cep564/metacog.htm), diakses, 5 Agustus 2014.
- Lucangeli, D., & Cornoldi, C. 1997. *Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship?* *Mathematical Cognition*, 2, 121–139. <https://books.google.co.id/books?id.>
- Mas'ud, Arifin Ahmad and Gufran Darma Dirawan. 2015. *Math Problem Solving with Metacognitive Skills Involving Foreign Students Senior High School 3 Parepare*. *Journal. Man In India*, 95 (3) : 813-820
- Moleong, L.J. 2014. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Edisi Revisi. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Mulbar, Usman. 2014. *Metakognisi Siswa dalam Pembelajaran Matematika Realistik*. Pidato Pengukuhan Profesor, tanggal 25 November 2014. Makassar: Universitas Negeri Makassar.
- Mulyasa, E. 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan*. Bandung: PT. Remaja Rosdakarya.
- Murni, Atma. 2010. *Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Metakognitif Berbasis Masalah Kontekstual*. Tersedia pada: <http://eprints.uny.ac.id/10499/1/P11-Atma.pdf>

- NCTM (National Council of Teacher of Mathematics). 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nelson, T.O. 1992. *Metacognition (Core Reading)*. Boston: Allyn and Bacon.
- Nieveen, N. 1999. *Prototyping to Reach Product Quality*. Jan Van den Akker, Robert Maribe Braneh, Ken Gustafson, and Tjeerd Plomp (Ed), London: Kluwer Academic Plubishers.
- Novita, Maria. I. B. et.al. 2016. *The Correlation Between Metacognitive Skills and The Critical Thinking Skills of The Senior High Schoo Students in Biology Learning Through The Implementation of Problem Based Learning (PBL) in Malang Indonesia*. International Journal of Academic Research and Development. ISSN: 2455-4197, Impact Factor: RJIF 5.22. www.newresearchjournal.com/academic. Volume 1; Issue 5; May 2016; Page No. 58-63.
- Nurdin. 2007. *Model Pembelajaran yang Menumbuhkan Kemampuan Metakognitif*, Disertasi tidak dipublikasikan, Program Pascasarjana Unesa. Surabaya.
- 2016. *Model Pembelajaran Menumbuhkembangkan Kemampuan Metakognitif*. Makassar. Pustaka Refleksi.
- O'Neil & Brown. 1997. *Differential Effects of Question Formats in Math Assessment on Metacognition and Affect*. Los Angeles: National Center for Research on Evaluation.
- Panaoura, Areti, and Philip pou, George. 2005. *Young Pupils' Metacognitive Abilities in Mathematics in Relation to Working Memory and Processing Efficiency*. University of Cyprus, Cyprus.

PISA. 2015. Results (Volume I) *Excellence and Equity in Education*. OECD Publishing. Tersedia pada: <file:///C:/Users/Administrator/Documents/PISA.2015>.

Plomp, Tjeerd. 1997. *Educational and Training System Design*. Enschede. The Netherlands. University of Twente.

Polya, G. 1973. *How To Solve It* (2nd Ed). Princeton: Princeton University Press.

Polya, George. 1988. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Second ed.). Princeton, N.J.: Princeton Science Library Printing.

Poedjiadi, Anna. 1999. *Pengantar Filsafat Ilmu bagi Pendidik*. Bandung: Penerbit Yayasan Cendrawasih.

Ratumanan, T.W. 2004. *Belajar dan Pembelajaran*. Surabaya: UNESA University Press.

Riddle, Elizabeth M. 1999. *Lev Vygotsky's Social Development Theory*. <http://chd.gse.gmu.edu/imersion/knowledgebase/theorists/constructivism/vygotsky.Htm>.

Riduwan. 2013. *Skala Pengukuran Variabel-Variabel Penelitian*. Bandung: Alfabeta.

Riyanto, Yatim. 2010. *Paradigma Baru Pembelajaran*. Jakarta: Kencana Penada Media Grup.

Ruseffendi, HET. 2006. *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.

- Rusman. 2017. *Belajar dan Pembelajaran Berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Kencana.
- Salam, Sofyan; Bangkono, Deri. 2012. *Pedoman Penulisan Tesis dan Disertasi*. Makassar: Badan Penerbit UNM.
- Sani, R.A. 2013. *Inovasi Pembelajaran*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Sanjaya, Wina. 2007. *Kajian Kurikulum dan Pembelajaran*. Bandung: PPs. UPI.
- Sartono Wiradikromo. 2006. *Matematika untuk SMA Kelas XI Program IPA*. Jakarta: Erlangga.
- Schoen, H.L. and Oehmke, T. 1980. A New Approach to the Measurement of Problem-Solving Skills, in *Problem Solving in School Mathematics*. Editors: Krulik, S. and Reys, R.E.. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Shadiq, Fadjar. 2004. *Penalaran, Pemecahan Masalah dan Komunikasi Dalam Pembelejaraan Matematika*. Yogyakarta: P4TK Matematika.
- Shoimin, Aris. 2016. *Enam Puluh Delapan Model Pembelajaran Inovatif dalam Kurikulum 2013*. Yogyakarta: Ar-Ruzz Media.
- Slavin, R.E. 1997. *Educational Psycholog-Theory and Practice*. Boston: Allyn and Bacon.
- . 2010. *Cooperative Learning: Teori, Riset, dan Praktik*. Translated by Narulta Yusron. Bandung: Nusa Media.
- Sri Wulandari, Danoebroto. 2008. *Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Melalui Pendekatan PMRI dan Pelatihan Metakognitif.*” *Jurnal Penelitian dan Evaluasi Pendidikan*. Tahun XI Nomor 1. Halaman 69-83. (<http://www.BlogAnakDesa.BerbagiPengetahuan.co.id>)

- Sudiarta, I Gusti Putu. 2006. *Penerapan Pembelajaran Berorientasi Pemecahan Masalah dengan Pendekatan Metakognitif untuk Meningkatkan Pemahaman dan Hasil Belajar Matematika Mahasiswa pada Matakuliah Statistika Matematika I Semester Ganjil Tahun 2006/2007*. Laporan Penelitian (tidak diterbitkan). IKIP Negeri Singaraja.
- Sugiyono. 2012. *Metode Penelitian Pendidikan Kuantitatif Kuantitatif dan R & D*. Bandung: Alfabeta.
- 2016. *Metode Penelitian & Pengembangan (Research and Development)*. Bandung: Alfabeta.
- Sudjimat, D.A. 1995. *Pembelajaran Pemecahan Masalah: Tinjauan Singkat Berdasarkan Teori Kognitif*. Journal Pendidikan Matematika dan Sains Malang: IKIP Malang
- Suparno, Paul. 1997. *Filsafat Konstrutivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius.
- 2001. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*. Yogyakarta: Kanisius.
- Susetyo, Budi. 2015. *Prosedur Penyusunan & Analisis Tes, Untuk Penilaian Hasil Belajar Bidang Kognitif*. Bandung: PT. Refika Aditama.
- Suwah Sembiring. 2015. *Excellent Matematika untuk SMA/MA/SMK*. Bandung: Yrama Widya
- Suyono dan Hariyanto. 2011. *Belajar dan Pembelajaran*. Bandung: PT. Rosdakarya Offset.
- Taccasu Project. 2008. *Metacognition*. Tersedia pada: <http://www.hku.hk/cepc/taccasu/ref/metacognition.html>. Diakses pada 10 September 2014.

Tasker, R. 1992. *Effective Teaching: What can A constructivist View of Learning offer?* ASTJ. Vol. 38, No. 1.

Theresia Laurens, 2011. ***Pengembangan Metakognisi Dalam Pembelajaran Matematika***. Disampaikan dalam Seminar Nasional Matematika Juli 2011. Tersedia pada: <https://p4mriunpat.wordpress.com/2011/11/14/metakognisi-dalam-pembelajaran-matematika/>. Diakses 12 Januari 2015.

TIMSS & PIRLS. 2011. *International Results in Mathematics*. International Study Center. Lynch School of Education, Boston College.

Tiro, Muhammad Arif. 2008. *Dasar-Dasar Statistika*. Makassar: Andira Publisher Makassar.

Veenman, M. 1993. *Intellectual ability and metacognitive skill: determinants of*

discovery learning in computerized learning environment. PhD thesis, University of Amsterdam.

Veenman. 2006. *Metacognition and Learning: Conceptual and Methodological Consideration*. Spinger Science Book. Co. Netherland.

Wahyudin Djumara dan Sudrajat, R. 2008. *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika Untuk Kelas XI SMA/MA Program IPA*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.

Wahyudin. 2003. Peranan Problem Solving. Makalah Seminar pada Technical Cooperation Project for Development of Mathematics and Science for Primary and Secondary Education in Indonesia. August 25, 2003.

- Wall, K. and Hall, E. 2009. *Developing New Understandings of Learning to Learn*. *Research Matters* (33): 3-14.
- Wheatley, G. H. 1991. *Constructivist Perspective on Science and Mathematics Learning*. *Journal of Research in Science Teaching*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 35 (1). 9-21.
- Wicaksono AGC. 2014. *Hubungan keterampilan metakognitif dan berpikir kritis terhadap hasil belajar kognitif siswa SMA pada pembelajaran biologi dengan strategi reciprocal teaching di Kabupaten Malang*. Thesis (tidak diterbitkan), State University of Malang. Indonesia.
- Widystono, Herry. 2014. *Pengembangan Kurikulum di Era Otonomi Daerah*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Winkel, W.S. 2014. *Psikologi Pengajaran*. Jakarta: PT Grasindo.
- Widodo, Supriyono & Abu Ahmadi. 2004. *Psikologi Belajar*. Jakarta: PT Rhineka Cipta.
- Woolkfork, Anita. 2009. *Educational Psychology: Active Learning Edition* (Terjemahan oleh Helly Prajitno Soetjipto & Sri Mulyantini Soetjipto). Edisi kesepuluh. Bagian kedua. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Yong, H.T.Y. & Kiong, L.N.K. 2006. *Metacognitive Aspect of Mathematics Problem Solving*, MARA University of Technology Malaysia. Kuala Lumpur.

RIWAYAT HIDUP



Dr. Mas'ud B., M.Pd. Penulis lahir di Majene pada tanggal 5 Desember 1963. Pendidikan Sekolah Dasar penulis tempuh di SD Negeri 2 Kampung Baru Majene dan selesai pada tahun 1976. Selanjtnya, penulis melanjutkan Pendidikan ke SMP Negeri 2 Majene hingga tahun 1980 dan SMA Negeri 1 Majene hingga tahun 1983. Penulis menyelesaikan Program Sarjana pada Jurusan Pendidikan Matematika IKIP Ujung Pandang pada tahun 1988, Program Master dibidang Pendidikan Matematika IKIP Surabaya pada tahun 1999 dan Program Doktor pada prodi Ilmu Pendidikan Universitas Negeri Makassar pada tahun 2007. Penulis merupakan dosen Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Parepare. Selain itu, penulis pernah menjadi konsultan pembelajaran matematika pada Rintisan SMA Berstandar Internasional (R-SMA-BI) SMAN 2 Majene pada tahun 2007-2013, instruktur PLPG Rayon 124 UNM tahun 2009-2014 dan asesor Beban Kerja Dosen (BKD) dan Laporan Kerja Dosen (LKD) tahun 2009- sekarang.



Dr. Marwati Ad. Malik, M.Pd. Penulis lahir di Sereang, Kabupaten Sidrap pada 25 Juli 1963. Penulis menyelesaikan Pendidikan di SD Negeri 1 Sereang pada tahun 1976, SMP Negeri 1 Pangsid pada tahun 1980 dan SMA Negeri 467 Pangsid pada tahun 1983. Selanjutnya penulis melanjutkan

studi ke Jenjang Sarjana pada bidang Pendidikan Matematika IKIP Ujung pandang, Program Magister Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya pada tahun 2001 dan Program Doktor dibidang Ilmu Pendidikan Universitas Negeri Makassar pada tahun 2018. Penulis merupakan dosen Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Parepare. Selama berkarir penulis telah melakukan banyak penelitian dan terlibat sebagai pemakalah dalam beberapa pertemuan ilmiah.